Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie

Zusammenfassung

Clemens Koppensteiner

Version 1.2
10. Oktober 2007

Ursprünglich nach der gleichnamigen Vorlesung von
Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Norbert Kusolitsch
im Wintersemester 2005.

"Misura ciò che è misurabile, e rendi misurabile ciò che non lo è."
Galileo Galilei

Die aktuelle Version dieses Dokumentes und seines Quelltextes sind unter
`http://www.caramdir.at/math.html`
abrufbar.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Dieses Dokument entstand als eine Zusammenfassung aller Definitionen und Sätze (ohne Beweise) aus der Vorlesung "Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie" von Prof. Kusolitsch auf der TU Wien im Wintersemester 2005, zusammengestellt nach meiner Mitschrift. Inzwischen sind allerdings einige Erweiterungen hinzugekommen. Leider sind Fehler unvermeidbar: Bei allen inhaltlichen, orthographischen, stilistischen und sonstigen (hier relevanten) Beschwerden schreibe mir bitte einfach eine Mail (zum Beispiel an `me@caramdir.at`). Die aktuelle Version dieses Textes ist immer unter `http://www.caramdir.at/math.html` verfügbar (in den Formaten PDF und PostScript, sowie als LaTeX-Quelltext).
Einige wichtige Notationen, die ich in dieser Zusammenfassung durchgehend verwende:

- Für eine Menge A ist $A^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in A$.
- Für eine Menge A bezeichnet $\mathfrak{P}(A)$ die Potenzmenge von A.
- $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
- Vektoren werden sans-serif notiert: v.
- Das kartesische Produkt der Mengen $A_1, \ldots, A_n$ sei $\prod_{i=1}^n A_i$.
- $\mathbf{1}_A$ ist die charakteristische Funktion (Indikatorfunktion) von A.
- Für eine reellwertige Funktion f ist $f^+ := \max(f, 0)$ und $f^- := \max(-f, 0)$.
- Für eine Folge (x_n) bedeutet $x_n \nearrow$, dass x_n monoton wachsend ist und $x_n \nearrow x$, dass x_n von unten gegen x konvergiert. Entsprechend $x_n \searrow$ bzw. $x_n \searrow x$ für monoton fallend bzw. von oben konvergent.

Diese Notationen weichen teilweise von denen der Vorlesung ab.

Danksagung

Vielen Dank für das Finden von Fehlern an: Claudia, Dominik, Florian, Johannes, Lukas, Markus, Matthias und Moritz. Und nochmals für Mitschriften an Claudia und Dominik.

1 Mengensysteme

Definition 1.1 (σ-Algebra)**.** Ein Mengensystem $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt *σ-Algebra* über Ω, wenn

1. $\Omega \in \mathfrak{A}$,
2. $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{A}$,
3. $A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{A}$,
4. (A_n) eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$.

Falls anstelle von 4 nur

4'. $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_n \in \mathfrak{A}$

gilt, wird $\mathfrak{A}$ *Algebra* genannt.

Satz 1.2. *Ein Mengensystem $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ ist genau dann eine Algebra, wenn*

1. $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{A}$,
2. $A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{A}$.

Ein Mengensystem $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ ist genau dann eine σ-Algebra, wenn

1. $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{A}$,
2. $(A_n) \in \mathfrak{A}^{\mathbb{N}} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$.

Definition 1.3 (Ring)**.** Ein Mengensystem $\mathfrak{R} \neq \emptyset$ heißt *Ring*, wenn für alle A, $B \in \mathfrak{R}$ auch $A \setminus B$ und $A \cup B$ in $\mathfrak{R}$ liegen.

Satz 1.4. *Für ein Mengensystem $\mathfrak{R} \neq \emptyset$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

- $\mathfrak{R}$ *ist ein Ring.*
- $A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow (A \triangle B \in \mathfrak{R}) \wedge (A \cap B \in \mathfrak{R})$.
- $A, B \in \mathfrak{R}, A \subseteq B \Rightarrow B \setminus A \in \mathfrak{R}$ *und*
  $A, B \in \mathfrak{R}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{R}$.

Definition 1.5 (σ-Ring)**.** Ein Mengensystem $\mathfrak{R}_\sigma \neq \emptyset$ heißt *σ-Ring*, wenn

- $A, B \in \mathfrak{R}_\sigma \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{R}_\sigma$,
- $(A_n) \in \mathfrak{R}_\sigma^{\mathbb{N}} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}_\sigma$.

Satz 1.6. *Für jede Folge (A_n) aus einem σ-Ring $\mathfrak{R}_\sigma$ gilt:*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}_\sigma.$$

Satz 1.7. *Jeder (σ-)Ring der Ω enthält ist eine (σ-)Algebra.*

Definition 1.8 (Semiring)**.** Ein Mengensystem $\mathfrak{T} \neq \emptyset$ heißt *Semiring (im engeren Sinn)*, wenn gilt:

1. $A, B \in \mathfrak{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{T}$,
2. $A \subseteq B,\ A, B \in \mathfrak{T}$ dann existieren paarweise disjunkte $C_1, \ldots, C_k$ aus $\mathfrak{T}$ mit $B \setminus A = \bigcup_{i=1}^k C_i$ und $A \cup \bigcup_{i=1}^m C_i \in \mathfrak{T}$ für $m = 1, \ldots, k$.

Bei einem *Semiring im weiteren Sinn* müssen die $A \cup \bigcup_{i=1}^m C_i$ nicht in $\mathfrak{T}$ liegen.

Satz 1.9. *Sind $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ Semiringe auf Ω_1 bzw. Ω_2, dann ist*

$$\mathfrak{T}_1 \otimes \mathfrak{T}_2 := \{A_1 \times A_2 : A_i \in \mathfrak{T}_i\}$$

ein Semiring auf $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Definition 1.10 (Semialgebra)**.** Ein Semiring der Ω enthält wird *Semialgebra* genannt.

Satz 1.11. *Ist $(\mathfrak{R}_i)_{i \in I}$ eine Familie von (σ-)Ringen/Algebren, so ist $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{R}_i$ vom selben Typ.*

Definition 1.12. Für ein Mengensystem $\mathfrak{C} \neq \emptyset$ bezeichnet

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{C}) := \bigcap_{\substack{\mathfrak{R} \text{ ist Ring} \\ \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{R}}} \mathfrak{R}$$

den *von $\mathfrak{C}$ erzeugten Ring*. Entsprechend ist $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{C})$ der von $\mathfrak{C}$ erzeugte σ-Ring, $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$ die erzeugte Algebra und $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C})$ die erzeugte σ-Algebra.

Die so erzeugten Systeme sind die kleinsten ihres Typs, die $\mathfrak{C}$ enthalten.

Definition 1.13 (Borel-Mengen)**.** Für den Semiring

$$\mathfrak{T}_n := \left\{ \prod_{i=1}^n (a_i, b_i] : a_i, b_i \in \mathbb{R} \right\}$$

über $\mathbb{R}^n$ wird die erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{B}_n := \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{T}_n)$ das *System der Borel-Mengen* genannt ($\mathfrak{B} := \mathfrak{B}_1$).

Siehe auch Satz A.3.

Satz 1.14. *Sei $\mathfrak{T}$ ein Semiring, so gilt*

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(\mathfrak{T}) &= \left\{ \bigcup_{i=1}^n A_i : A_i \in \mathfrak{T},\ n \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \left\{ \bigcup_{i=1}^n A_i : A_i \in \mathfrak{T},\ n \in \mathbb{N},\ A_i \cap A_j = \emptyset\ \forall i \neq j \right\}. \end{aligned}$$

Hilfssatz 1.15. *Sei $\mathfrak{T}$ ein Semiring und $A, A_1, \ldots, A_n$ aus $\mathfrak{T}$, dann existieren paarweise disjunkte $C_1, \ldots, C_k$ aus $\mathfrak{T}$ mit*

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{j=1}^k C_j.$$

Hilfssatz 1.16. *Sei $\mathfrak{T}$ ein Semiring und $A_1, \ldots, A_n$ aus $\mathfrak{T}$, dann existieren paarweise disjunkte $C_1, \ldots, C_k$ aus $\mathfrak{T}$ und Indexmengen $I_1, \ldots, I_n$ aus $\{1, \ldots, k\}$ mit*

$$A_i = \bigcup_{j \in I_i} C_j \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Definition 1.17 (monotones System)**.** Ein Mengensystem $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ heißt *monoton*, wenn für jede (bzgl. der Mengeninklusion) monotone Mengenfolge aus $\mathfrak{M}$ auch die Grenzmenge in $\mathfrak{M}$ liegt. Mittels

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{C}) := \bigcap_{\substack{\mathfrak{M} \text{ monoton} \\ \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{M}}} \mathfrak{M}$$

definiert man das von $\mathfrak{C}$ erzeugte monotone System.

Satz 1.18. *Sei $\mathfrak{R}$ ein Ring, so gilt*

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R}).$$

Definition 1.19 (Dynkin-System)**.** Ein Mengensystem $\mathfrak{D} \neq \emptyset$ heißt *Dynkin-System* (λ-System), wenn gilt:

1. $\Omega \in \mathfrak{D}$,
2. $D \in \mathfrak{D} \Rightarrow D^c \in \mathfrak{D}$,
3. $(D_n) \in \mathfrak{D}^{\mathbb{N}}$, paarweise disjunkt $\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \in \mathfrak{D}$.

Satz 1.20. *Ein Mengensystem $\mathfrak{D} \neq \emptyset$ ist genau dann ein Dynkin-System, wenn*

1. $\Omega \in \mathfrak{D}$,
2. $D_1 \subseteq D_2,\ D_i \in \mathfrak{D} \Rightarrow D_2 \setminus D_1 \in \mathfrak{D}$,
3. *$\mathfrak{D}$ ist monoton.*

Definition 1.21 (durchschnittsstabiles System)**.** Ein Mengensystem $\mathfrak{C}$ heißt *durchschnittsstabil*, wenn mit zwei beliebigen Mengen auch deren Durchschnitt in $\mathfrak{C}$ enthalten ist.

Satz 1.22. *Jedes durchschnittsstabile Dynkin-System ist auch eine σ-Algebra.*

Satz 1.23. *Sei $\mathfrak{C}$ ein durchschnittsstabiles Mengensystem, dann gilt*

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}).$$

Satz 1.24. *Sei $X : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Abbildung und und $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega_2)$ ein nichtleeres Mengensystem, dann gilt*

$$X^{-1}\left(\mathfrak{R}_\sigma\left(\mathfrak{C}\right)\right) = \mathfrak{R}_\sigma\left(X^{-1}\left(\mathfrak{C}\right)\right).$$

Definition 1.25. In einem Universum Ω seien ein Mengensystem $\mathfrak{C} \neq \emptyset$ und eine Menge $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ gegeben. Dann nennt man $\mathfrak{C}_{\cap A} := \{C \cap A : C \in \mathfrak{C}\}$ die *Spur* von $\mathfrak{C}$ in A.

Satz 1.26. *Mit den Bezeichnungen der vorherigen Definition gilt*

$$\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{C}_{\cap A}) = \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{C})_{\cap A}.$$

1.1 Mengenfolgen

Definition 1.27 (lim inf, lim sup, lim)**.** Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen. Man definiert den *Limes superior* bzw. *Limes inferior* dieser Folge als

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\geq n} A_k \right) \text{ bzw.}$$

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{k\geq n} A_k \right).$$

Falls $\limsup A_n = \liminf A_n$, wird diese Menge der *Limes* der Mengenfolge ($\lim\limits_{n\to\infty} A_n$) genannt.

Satz 1.28. *Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen, dann gilt:*

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Bei monotonen Folgen existiert der Limes und es gilt

$$(A_n) \nearrow \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \qquad \textit{bzw.} \qquad (A_n) \searrow \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Satz 1.29. *Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von Ω, so gilt*

- $\limsup A_n = \{\omega \in \Omega : \omega$ *liegt in unendlich vielen* $A_n\}$ *und*
- $\liminf A_n = \{\omega \in \Omega : \omega$ *liegt in fast allen* $A_n\}$.

2 Maßfunktionen

Definition 2.1 (Additivität)**.** Sei $\mathfrak{C}$ ein Mengensystem. Eine Abbildung $\mu\colon \mathfrak{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt

- *additiv*, wenn für jede paarweise disjunkte endliche Mengenfolge $A_1, \dots, A_n$ aus $\mathfrak{C}$, deren Vereinigung wieder in $\mathfrak{C}$ liegt, $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_n)$ gilt;
- *σ-additiv*, wenn für jede abzählbare Mengenfolge (A_i) aus $\mathfrak{C}$, mit paarweise disjunkten Gliedern und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{C}$, $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n)$ gilt.

Definition 2.2 (Inhalt, Maß)**.** Sei $\mathfrak{T}$ ein Semiring. Eine Abbildung $\mu\colon \mathfrak{C} \to \mathbb{R}$ heißt *Inhalt* auf $\mathfrak{T}$, wenn

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. $\mu(A) \geq 0,\ \forall A \in \mathfrak{T}$,
3. μ ist additiv.

Ist μ sogar σ-additiv, dann wird μ ein *Maß* auf $\mathfrak{T}$ gennant. Ist außerdem $\mathfrak{T}$ eine Semialgebra und $\mu(\Omega) = 1$, dann heißt μ *Wahrscheinlichkeitsmaß* (oder *Wahrscheinlichkeitsverteilung*).

Definition 2.3. Sei μ ein Maß auf $\mathfrak{T}$, dann heißt

1. μ *endlich* $:\Leftrightarrow \mu(A) < \infty\ \forall A \in \mathfrak{T}$;
2. μ *σ-endlich* $:\Leftrightarrow \exists (A_n) \in \mathfrak{T}^{\mathbb{N}}$ mit $\bigcup A_n = \Omega$ und $\mu(A_n) < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$;
3. $\mathfrak{T}$ *μ-vollständig* $:\Leftrightarrow B \in \mathfrak{T} \wedge \mu(B) = 0 \wedge A \subseteq B \Rightarrow A \in \mathfrak{T}$.

Satz 2.4. *Sei $\mathfrak{T}$ ein Semiring, μ nicht-negativ und $\mu(\emptyset) = 0$, dann ist μ additiv genau dann, wenn*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \textit{für alle } A, B \in \mathfrak{T} \textit{ mit } A \cap B = \emptyset,\ A \cup B \in \mathfrak{T}.$$

Satz 2.5. *Sei μ ein Inhalt auf einem Semiring $\mathfrak{T}$, $A, B \in \mathfrak{T}$ und $A \subseteq B$, dann gilt*

- $\mu(A) \leq \mu(B)$,
- $B \setminus A \in \mathfrak{T},\ \mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Satz 2.6 (Fortsetzung)**.** *Ist μ ein Inhalt/Maß auf einem Semiring $\mathfrak{T}$, so gibt es ein(en) eindeutig bestimmten(-s) Inhalt/Maß $\bar{\mu}$ auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{T})$ mit*

$$\mu(A) = \bar{\mu}(A) \quad \forall A \in \mathfrak{T}.$$

Die Abbildung $\bar{\mu}$ wird Fortsetzung von μ auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{T})$ genannt und man schreibt meist $\mu := \bar{\mu}$.

Festlegung: Bis zum Ende des Abschnittes – wenn nicht anders angemerkt – sei $\mathfrak{T}$ ein Semiring und $\mathfrak{R}$ ein Ring.

Satz 2.7 (σ-Subadditivität)**.** *Sei μ ein Maß auf $\mathfrak{T}$ (und daher auch auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{T})$), $(A_n) \in \mathfrak{R}(\mathfrak{T})^{\mathbb{N}}$ und $A \in \mathfrak{R}(\mathfrak{T})$ mit $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, dann folgt*

$$\mu(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Satz 2.8. *Sei μ ein Inhalt auf $\mathfrak{T}$, $(A_n) \in \mathfrak{R}(\mathfrak{T})^{\mathbb{N}}$ mit paarweise disjunkten Gliedern und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}(\mathfrak{T})$. Dann gilt für jede Menge $A \in \mathfrak{R}(\mathfrak{T})$ mit $A \supseteq \bigcup A_n$:*

$$\mu(A) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Definition und Satz 2.9 (Stetigkeit von unten)**.** *Sei μ ein Maß auf einem Ring $\mathfrak{R}$ und $(A_n) \in \mathfrak{R}^{\mathbb{N}}$ monoton wachsend mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}$, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n).$$

Definition und Satz 2.10 (Stetigkeit von oben)**.** *Sei μ ein Maß auf einem Ring $\mathfrak{R}$ und $(A_n) \in \mathfrak{R}^{\mathbb{N}}$ monoton fallend mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}$ und $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_{n_0}) < \infty$, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n).$$

Satz 2.11. *Ist μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathfrak{R}$ und μ bei jeder Menge aus $\mathfrak{R}$ stetig von unten, dann ist μ sogar ein Maß.*

Satz 2.12. *Ist μ ein endlicher Inhalt auf einem Ring $\mathfrak{R}$ und μ bei $\emptyset$ stetig von oben, dann ist μ sogar ein Maß.*

Satz 2.13. *Ist μ ein Maß auf $\mathfrak{R}$, $(A_n) \in \mathfrak{R}^{\mathbb{N}}$ und $\liminf A_n, \limsup A_n \in \mathfrak{R}$, dann gilt*

$$\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n) \leq \limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n).$$

Satz 2.14 (Erstes Lemma von Borel-Cantelli)**.** *Sei μ ein endliches Maß auf einem Ring $\mathfrak{R}$, $(A_n) \in \mathfrak{R}^{\mathbb{N}}$ und $\limsup A_n \in \mathfrak{R}$, dann gilt*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(\limsup A_n) = 0.$$

Satz 2.15 (Additionstheorem)**.** *Sei μ ein endliches Maß auf $\mathfrak{R}$. Dann gilt für $A_1, \ldots, A_n$ aus $\mathfrak{R}$:*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mu\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right)\right].$$

Definition 2.16 (äußeres Maß)**.** Eine Funktion $\mu^*\colon \mathfrak{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ wird *äußeres Maß* genannt, wenn

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$;
2. $\forall A \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mu^*(A) \geq 0$;
3. $\forall A, B \in \mathfrak{P}(\Omega) : A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
4. $\forall (A_n) \in \mathfrak{P}(\Omega)^{\mathbb{N}} : A \subseteq \bigcup A_n \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$ (Sub-σ-additivität).

Definition und Satz 2.17 (erzeugtes äußeres Maß)**.** *Sei μ ein Maß auf $\mathfrak{R}$. Das* von μ erzeugte (induzierte) äußere Maß μ^* *ist für jedes $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ definiert durch*

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) : (B_n) \in \mathfrak{R}^{\mathbb{N}},\ A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \right\}.$$

(Dabei sei $\inf \emptyset := +\infty$*.)*
μ^* ist dann tatsächlich ein äußeres Maß.

Definition 2.18 (messbare Menge)**.** Eine Menge A heißt μ^*-messbar für ein (äußeres) Maß μ^* genau dann, wenn für alle $B \subseteq \Omega$ gilt:

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

Das System aller μ^*-messbaren Teilmengen von Ω wird mit $\mathfrak{M}_{\mu^*}$ bezeichnet.

Satz 2.19. *Das System $\mathfrak{M}_{\mu^*} := \{A \subseteq \Omega : A \text{ ist } \mu^*\text{-messbar}\}$ ist eine σ-Algebra. Es gilt:*

- *μ^* ist σ-additiv auf $\mathfrak{M}_{\mu^*}$;*
- *$A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{M}_{\mu^*}$ paarweise disjunkt, $C \in \mathfrak{P}(\Omega)$, dann ist*

$$\mu^*\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap C\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i \cap C).$$

Satz 2.20. *Sei μ ein Maß auf einem Ring $\mathfrak{R}$ und μ^* das induzierte äußere Maß, so gilt*

$$\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{M}_{\mu^*},$$
$$\mu(A) = \mu^*(A) \quad \forall A \in \mathfrak{R}.$$

Anmerkung: Aufgrund dieses Satzes wird in späteren Abschnitten μ^* mit μ identifiziert.

Satz 2.21. *Sei μ ein Maß auf $\mathfrak{R}$, dann gibt es eine Fortsetzung von μ auf $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R})$. Ist μ auf $\mathfrak{R}$ σ-endlich, so ist die Fortsetzung eindeutig und ebenfalls σ-endlich.*

Siehe auch Satz 2.6.

Satz 2.22. *Ist μ ein σ-endliches Maß auf $\mathfrak{R}$, dann ist $\mathfrak{M}_{\mu^*}$ μ^*-vollständig.*

Festlegung: Bis zum Ende des Abschnittes – so nicht anders angemerkt – sei $\mathfrak{S} := \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R})$ ein Sigmaring.

Definition 2.23 (Vervollständigung eines σ-Ringes)**.** Sei μ ein Maß auf $\mathfrak{S}$, dann heißt

$$\overline{\mathfrak{S}} := \{A \cup N : A \in \mathfrak{S} \text{ und } \exists M \in \mathfrak{S} \text{ mit } N \subseteq M \wedge \mu^*(M) = 0\}$$

die *Vervollständigung* von $\mathfrak{S}$.

Satz 2.24.

- *$\overline{\mathfrak{S}}$ ist ein σ-Ring.*
- *Durch $\overline{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$ wird μ eindeutig von $\mathfrak{S}$ auf $\overline{\mathfrak{S}}$ fortgesetzt.*
- *Sei $\widehat{\mathfrak{S}} \supseteq \mathfrak{S}$ $\widehat{\mu}$-vollständig für eine Fortsetzung $\widehat{\mu}$ von μ auf $\widehat{\mathfrak{S}}$, so folgt $\widehat{\mathfrak{S}} \supseteq \overline{\mathfrak{S}}$.*

Satz 2.25. *Sei A aus $\mathfrak{M}_{\mu^*}$, dann gibt es zwei Mengen C und D aus $\mathfrak{S}$ mit*

$$C \subseteq A \subseteq D \text{ und } \mu(D \setminus C) = 0 \text{ und } \mu(C) = \mu^*(A) = \mu(D).$$

Satz 2.26. *Sei μ σ-endlich auf $\mathfrak{R}$, dann gilt: $\overline{\mathfrak{S}} = \mathfrak{M}_{\mu^*}$.*

Satz 2.27 (Approximationssatz)**.** *Ist μ ein Maß auf $\mathfrak{R}$ und A in $\mathfrak{M}_{\mu^*}$ mit $\mu(A) < \infty$, dann gilt:*

$$\forall \epsilon > 0 : \exists C_\epsilon \in \mathfrak{R} \text{ mit } \mu(A \triangle C_\epsilon) \leq \epsilon.$$

Definition 2.28. Sei $\mathfrak{S}$ eine σ-Algebra über Ω, dann heißt das Paar $(\mathfrak{S}, \Omega)$ ein *Messraum*. Ist zusätzlich mit μ ein Maß auf $\mathfrak{S}$ definert, heißt das Tripel $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein *Maßraum*. Ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß (also $\mu(\Omega) = 1$), schreibt man oft $P := \mu$ und nennt $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ einen *Wahrscheinlichkeitsraum* und die Mengen in $\mathfrak{S}$ *Ereignisse*.

2.1 Unabhängigkeit von Ereignissystemen

Definition 2.29. Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Man nennt eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Ereignissen *unabhängig*, wenn für alle endlichen Teilmengen $\{i_1, \ldots, i_n\}$ von I gilt:

$$P(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}) = \prod_{j=1}^{n} P(A_{i_j}).$$

Definition 2.30 (bedingte Wahrscheinlichkeit)**.** Für Ereignisse A und B mit $P(B) > 0$ heißt

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

die *bedingte Wahrscheinlichkeit* von A unter B.

Satz 2.31 (Satz von der vollständigen Wahrscheinlichkeit)**.** *Für Ereignisse $A, H_1, \ldots, H_n$ mit $H_i \cap H_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$ gilt*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) P(H_i).$$

Satz 2.32 (Bayes'sches Theorem). *Mit den Bezeichnungen aus dem vorherigen Satz gilt für alle* $i = 1, \ldots, n$

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A)} = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)}.$$

Definition 2.33. Man nennt eine Famile $(\mathfrak{C}_i)_{i\in I}$ von Mengensystemen auf Ω *unabhängig*, wenn für jede endliche Teilmenge $\{i_1, \ldots, i_n\}$ von I

$$P(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}) = \prod_{j=1}^{n} P(A_{i_j}) \text{ für alle } A_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \text{ mit } A_{i_j} \in \mathfrak{C}_{i_j} \text{ gilt.}$$

Satz 2.34. *Sei* $(\mathfrak{C}_i)_{i\in I}$ *eine unabhängige Familie von durchschnittsstabilen Mengensystemen. Dann ist auch* $(\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_\mathrm{i}))_{i\in I}$ *unabhängig.*

Satz 2.35 (Zweites Lemma von Borel-Cantelli). *Für jede Folge* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von unabhängigen Ereignissen mit* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ *gilt*

$$P(\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1.$$

Satz 2.36 (Kolmogorows 0-1-Gesetz). *Sei* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von unabhängigen Ereignissen und* $\mathfrak{A}_\infty := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_\sigma(A_n, A_{n+1}, \ldots)$*. Dann gilt für jedes* $A \in \mathfrak{A}_\infty$ *(man nennt ein solches Ereignis* terminal *oder* asymptotisch*)* $P(A) = 0$ *oder* $P(A) = 1$*.*

Anmerkung: $\limsup A_n$ und $\liminf A_n$ sind Beispiele für terminale Ereignisse.

3 Lebesgue-Stieltjes-Maße

Definition 3.1 (Lebesgue-Stieltjes-Maß)**.** Maße auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, die jeder beschränkten Menge einen endlichen Wert zugeorden heißen *Lebesgue-Stieltjes-Maße*[1].

Definition 3.2 (Verteilungsfunktion)**.** Eine Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Verteilungsfunktion* eines eindimensionalen Lebesgue-Stieltjes-Maßes μ, wenn

$$\mu\left((a,b]\right) = F(b) - F(a) \quad \forall a \leq b.$$

Ist μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, spricht man von einer Verteilungsfunktion *im engeren Sinn* (i.e.S.), anderenfalls von einer *im weiteren Sinn* (i.w.S.).

Satz 3.3. *Sei μ ein eindimensionales Lebesgue-Stieltjes-Maß. Dann ist*

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \mu\left((0,x]\right) & \text{falls } x \geq 0 \\ -\mu\left((x,0]\right) & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

eine Verteilungsfunktion von μ. Eine Funktion G ist genau dann eine weitere Verteilungsfunktion von μ, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Satz 3.4. *Eine Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Verteilungsfunktion eines Lebesgue-Stieltjes-Maßes, wenn sie*

- *monoton wachsend ($x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$) und*
- *rechtsseitig stetig ($\lim\limits_{x \to x_0+} F(x) = F(x_0)$) ist.*

Definition 3.5 (Lebesgue-Maß)**.** Auf dem Semiring der halboffenen Intervalle sei ein Maß $\tilde{\lambda}$ mit $\tilde{\lambda}\left((a,b]\right) := b - a$ definiert. Die eindeutige Fortsetzung dieses Maßes auf $\mathfrak{B}$ heißt *Lebesgue-Maß* λ. Das System aller λ-messbaren Mengen wird mit $\mathfrak{L}$ bezeichnet. Entsprechend definiert man auf $\mathfrak{B}_n$ das n-dimensionale Lebesgue-Maß λ_n und das Mengensystem $\mathfrak{L}_n$.

Satz 3.6. *Sei $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \alpha x + \beta$ ($\alpha \neq 0$) ein linearer Operator. Dann gilt:*

1. *$B \in \mathfrak{B} \Leftrightarrow T(B) \in \mathfrak{B}$;*
2. *$B \in \mathfrak{L} \Leftrightarrow T(B) \in \mathfrak{L}$;*
3. *$\lambda\left(T(B)\right) = |\alpha|\lambda(B) \quad \forall B \in \mathfrak{B}$.*

Satz 3.7. *Ist μ ein translationsinvariantes L-S-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, so gibt es ein $\kappa \geq 0$ mit $\mu(B) = \kappa\lambda(B)$ für alle $B \in \mathfrak{B}$.*

Satz 3.8. *Sei μ ein L-S-Maß, dann ist eine Menge B genau dann aus $\mathfrak{M}_\mu$, wenn für alle $\epsilon > 0$ eine offene Menge U und eine abgeschlossene Menge A existieren, mit $A \subseteq B \subseteq U$ und $\mu(U \setminus A) < \epsilon$.*

[1] Im Folgenden oft kurz *L-S-Maß*.

Satz 3.9. *Eine Menge B ist genau dann in $\mathfrak{M}_\mu$, wenn es*

1. $U := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ *mit offenen Mengen U_n und $B \subseteq U$, sowie*
2. $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *mit abgeschlossenen Mengen A_n und $B \supseteq A$*

gibt mit $\mu(A) = \mu(B) = \mu(U)$ und $\mu(U \setminus A) = 0$.

Satz 3.10. *Für jedes L-S-Maß μ gilt*

- $\mu(B) = \inf\{\mu(U) : U \text{ offen}, U \supseteq B\}$;
- $\mu(B) = \sup\{\mu(A) : A \text{ abgeschlossen}, A \subseteq B\}$;
- $\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \text{ kompakt}, K \subseteq B\}$.

Definition 3.11. Eine Funktion $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Sprungfunktion*, wenn es eine höchstens abzählbare Menge S und eine Funktion $p\colon S \to (0,\infty)$ mit

$$\sum_{x\in S\cap(-n,n)} p(x) < \infty \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

gibt, so dass ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$G(x) = c + \operatorname{sgn} x \sum_{y\in S\cap(\min\{x,0\},\max\{x,0\})} p(y) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Satz 3.12. *Jede Verteilungsfunktion F kann, bis auf eine additive Konstante, eindeutig dargestellt werden als die Summe einer Sprungfunktion G und einer monoton wachsenden stetigen Funktion H.*

Bei einer Wahrscheinlichkeitsverteilung P kann man $G(x) := \sum_{y\in S\cap(-\infty,x)} p(y)$ schreiben. Es ist dann $G(x) \le F(x) := P((-\infty,x])$,

$$F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1, \quad 0 \le F(x) \le 1, \quad G(-\infty) = 0, \quad 0 \le G(+\infty) \le 1.$$

Es sind (für $q := G(+\infty), q \ne 0,1$) $\widetilde{G} := \frac{1}{q}G$ und $\widetilde{H} := \frac{1}{1-q}H$ Verteilungsfunktionen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

Definition und Satz 3.13 (verallgemeinerte Inverse)**.** *Sei F die Verteilungsfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\mathbb{R},\mathfrak{B})$. Dann nennt man die Funktion $F^{-1}\colon [0,1] \to \mathbb{R} : p \mapsto \min\{x : F(x) \ge p\}$ die* verallgemeinerte Inverse *von F. $F^{-1}(p)$ wird das p-*Fraktil *von F genannt. Es gelten folgende Eigenschaften:*

- $p \le q \Leftrightarrow F^{-1}(p) \le F^{-1}(q)$;
- $p \le F(x) \Leftrightarrow F^{-1}(p) \le x$;
- $\left(F^{-1}\right)^{-1}((-\infty,x]) = [0,F(x)]$.

Siehe auch Satz A.10.

3.1 Lebesgue-Stieltjes-Maße auf $\mathbb{R}^m$

Im Folgenden seien die Operationen und die "$<$"-Relation auf Vektoren elementweise definiert. Für $\mathsf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathsf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ ist also z.B. $\mathsf{x} \cdot \mathsf{y} = (x_1 y_1, \ldots, x_n y_n)$. Des weiteren sei $x_n^m := (x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m)$.

Definition 3.14 (Differenzenoperator)**.** Für eine Funktion $F \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ und $\mathsf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ sei

$$\underset{i}{\triangle}{}_a^b F(\mathsf{x}) := F(x_1^{i-1}, b, x_{i+1}^m) - F(x_1^{i-1}, a, x_{i+1}^m).$$

Satz 3.15. *Für Funktionen $F, G \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ gilt*

- $\underset{i}{\triangle}{}_a^b (F + G) = \underset{i}{\triangle}{}_a^b F + \underset{i}{\triangle}{}_a^b G$;
- $\underset{i}{\triangle}{}_a^b F = \operatorname{sgn}(b - a) \underset{i}{\triangle}{}_{\min\{a,b\}}^{\max\{a,b\}} F$;
- $\underset{i}{\triangle}{}_{a_i}^{b_i} \underset{j}{\triangle}{}_{a_j}^{b_j} F = \underset{j}{\triangle}{}_{a_j}^{b_j} \underset{i}{\triangle}{}_{a_i}^{b_i} F.$

Aufgrund der letzten Eigenschaft ist folgende Definition sinnvoll:

Definition 3.16 (allgemeiner Differenzenoperator)**.** Für eine Funktion $F \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ und $\mathsf{a} = (a_1, \ldots, a_m)$, $\mathsf{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ ist

$$\triangle_{\mathsf{a}}^{\mathsf{b}} F := \underset{m}{\triangle}{}_{a_m}^{b_m} \cdots \underset{1}{\triangle}{}_{a_1}^{b_1} F$$

Satz 3.17.

- $\triangle_{\mathsf{a}}^{\mathsf{b}} (F + G) = \triangle_{\mathsf{a}}^{\mathsf{b}} F + \triangle_{\mathsf{a}}^{\mathsf{b}} G$;
- *Hängt $F \colon \mathbb{R}^m \to R$ nicht von x_i (für ein i) ab, dann ist $\triangle_{\mathsf{a}}^{\mathsf{b}} F = 0$;*

Satz 3.18. *Sei $F \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ und $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt*

$$\triangle_{\mathsf{a}}^{\mathsf{b}} F = \sum_{\mathsf{e} \in \{0,1\}^m} (-1)^{\sum e_i} F\left(\mathsf{e}\mathsf{a} + (1 - \mathsf{e})\mathsf{b}\right).$$

Satz 3.19. *Seien $F, G \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ und gelte $\triangle_{\mathsf{a}}^{\mathsf{b}} F = \triangle_{\mathsf{a}}^{\mathsf{b}} G$ für alle $\mathsf{a} \le \mathsf{b}$ aus $\mathbb{R}^m$. Dann gilt $\triangle_{\mathsf{a}}^{\mathsf{b}} F = \triangle_{\mathsf{a}}^{\mathsf{b}} G$ sogar für alle $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{R}^m$ und es gibt Funktionen $H_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, die von x_i unabhängig sind, sodass $G = F + \sum_{i=1}^m H_i$.*

Definition 3.20. Für $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{R}^m$ $(\mathsf{a} < \mathsf{b})$ sei $(\mathsf{a}, \mathsf{b}] := \prod_{i=1}^m (a_i, b_i]$.

Hilfssatz 3.21. *Sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt für alle $i = 1, \ldots, m$:*

$$\mu\left((\mathsf{a}, \mathsf{b}]\right) = \triangle_{a_i}^{b_i} \operatorname{sgn}(x_i)\ \mu\left(\prod_{j \ne i} (a_j, b_j] \times \left(\min\left(x_i, 0\right), \max\left(x_i, 0\right)\right]\right).$$

Definition 3.22 (Verteilungsfunktion)**.** Eine Funktion $F \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ heißt *Verteilungsfunktion* eines m-dimensionalen Lebesgue-Stieltjes-Maßes μ, wenn

$$\mu((\mathsf{a}, \mathsf{b}]) = \triangle_{\mathsf{a}}^{\mathsf{b}} F$$

gilt. Für $\mathsf{a} \le \mathsf{b}$ ist dann

$$\triangle_{\mathsf{a}}^{\mathsf{b}} F \ge 0.$$

Satz 3.23. *Sei μ ein m-dimensionales Lebesgue-Stieltjes-Maß auf* $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. *Dann ist* $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *mit*

$$F(\mathsf{x}) = \operatorname{sgn}\left(\prod_{i=1}^{m} x_i\right) \mu\left((\min(\mathsf{x}, \mathsf{0}), \max(\mathsf{x}, \mathsf{0})]\right)$$

eine Verteilungsfunktion von μ. (Minimum und Maximum sind komponentenweise zu bilden.)

Satz 3.24. $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *ist genau dann eine Verteilungsfunktion eines m-dimensionalen L-S-Maßes, wenn gilt:*

- $\forall \mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{R}^m : \mathsf{a} \leq \mathsf{b} \Rightarrow \triangle_{\mathsf{a}}^{\mathsf{b}} F \geq 0$ *und*
- F *ist in jeder Koordinate rechtsstetig.*

Anmerkung: Aus dem ersten Punkt folgt *nicht*, dass F in jeder Koordinate monoton wachsend ist.

Satz 3.25. *Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. *Dann ist* $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *mit*

$$F(\mathsf{x}) = P\left((-\infty, \mathsf{x}]\right)$$

eine Verteilungsfunktion von P. Für dieses F gilt

$$\lim_{\min\{x_1,\ldots,x_m\}\to-\infty} F(\mathsf{x}) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\min\{x_1,\ldots,x_m\}\to+\infty} F(\mathsf{x}) = 1.$$

F ist in jeder Koordinate monoton wachsend. Jede weitere Verteilungsfunktion G von P mit $\lim_{\min\{x_1,\ldots,x_m\}\to-\infty} G(\mathsf{x}) = 0$ *stimmt mit F überein.*

Satz 3.26. *Sei* $f\colon \mathbb{R}^m \to [0, \infty)$ *so, dass folgende Definition sinnvoll ist (d. h. die Integrale existieren alle):*

$$F(x_1, \ldots, x_m) := \int_{-\infty}^{x_m} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f(t_1, \ldots, t_m)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_m$$

Dann ist F eine Verteilungsfunktion eines L-S-Maßes auf $\mathbb{R}^m$.

Satz 3.27. *Sei λ_m das m-dim. Lebesgue-Maß auf* $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *mit* $\det A \neq 0$, $\mathsf{b} \in \mathbb{R}^m$ *und* $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m : \mathsf{x} \mapsto A\mathsf{x} + \mathsf{b}$. *Dann gilt*

- $B \in \mathfrak{B}_m \Leftrightarrow T(B) \in \mathfrak{B}_m$ *und*
- $(\lambda_m \circ T)(B) = |\det A|\, \lambda_m(B)$.

Insbesondere gilt der Satz für $A = E_m$, also $T(\mathsf{x}) = \mathsf{x} + \mathsf{b}$ eine Translation.

4 Messbare Funktionen

Definition 4.1 ($\mathfrak{S}_1$-$\mathfrak{S}_2$-messbare Funktionen)**.** Seien $(\Omega_i, \mathfrak{S}_i)$ $(i = 1, 2)$ zwei Messräume und $X\colon \Omega_1 \to \Omega_2$. Dann heißt X $\mathfrak{S}_1$-$\mathfrak{S}_2$-*messbar*, wenn

$$X^{-1}(A) \in \mathfrak{S}_1 \qquad \forall A \in \mathfrak{S}_2.$$

Um anzudeuten, dass X $\mathfrak{S}_1$-$\mathfrak{S}_2$-messbar ist, schreibt man

$$X\colon (\Omega_1, \mathfrak{S}_1) \to (\Omega_2, \mathfrak{S}_2).$$

Ist $\Omega_1 \in \mathfrak{L}_{m_1}$, $\Omega_2 = \mathbb{R}^{m_2}$ und $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{B}_{m_2}$ $(m_i \in \mathbb{Z}^+)$, so nennt man X

- *Borel-messbar*, wenn $\mathfrak{S}_1 = (\mathfrak{B}_{m_1})_{\cap\Omega_1}$ und
- *Lebesgue-messbar*, wenn $\mathfrak{S}_1 = (\mathfrak{L}_{m_1})_{\cap\Omega_1}$ ist.

Definition 4.2 (Schreibweisen)**.** Für eine Funktion $X\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ und ein Prädikat Q schreibt man

$$[Q\,(X)] := \{\omega \in \Omega_1 : Q(X(\omega))\}\,.$$

Beispiele dafür sind:

- $[X \in A] = \{\omega \in \Omega_1 : X(\omega) \in A\} = X^{-1}(A)$;
- $[X > c] = \{\omega \in \Omega_1 : X(\omega) \in (c, \infty)\} = X^{-1}\left((c, \infty)\right)$.

Satz 4.3. *Seien $(\Omega_i, \mathfrak{S}_i)$ $(i = 1, 2)$ Messräume, $X\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ und $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C})$ für ein Mengensystem $\mathfrak{C}$, dann gilt*

$$X : (\Omega_1, \mathfrak{S}_1) \to (\Omega_2, \mathfrak{S}_2) \Leftrightarrow X^{-1}(C) \in \mathfrak{S}_1 \quad \forall C \in \mathfrak{C}.$$

Satz 4.4. *Für einen Messraum $(\Omega, \mathfrak{S})$ und eine Funktion $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ ist folgendes äquivalent:*

- $X\colon (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$,
- $[X < c] \in \mathfrak{S} \quad \forall c \in \mathbb{R}$,
- $[X \le c] \in \mathfrak{S} \quad \forall c \in \mathbb{R}$,
- $[X \in O] \in \mathfrak{S} \quad \forall O \subseteq \mathbb{R}$, *$O$ offen,*
- $[X \in A] \in \mathfrak{S} \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}$, *$A$ abgeschlossen.*

Satz 4.5. *Sei $X\colon \mathbb{R}^{m_1} \to \mathbb{R}^{m_2}$ stetig. Dann ist $X\colon (\mathbb{R}^{m_1}, \mathfrak{B}_{m_1}) \to (\mathbb{R}^{m_2}, \mathfrak{B}_{m_2})$.*

Satz 4.6. *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ $(X = (X_1, \ldots, X_m))$. Dann ist $X\colon (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ genau dann, wenn für alle $i = 1, \ldots, m$: $X_i\colon (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.*

Satz 4.7. *Messbarkeit ist transitiv: $X\colon (\Omega_1, \mathfrak{S}_1) \to (\Omega_2, \mathfrak{S}_2)$, $Y\colon (\Omega_2, \mathfrak{S}_2) \to (\Omega_3, \mathfrak{S}_3)$. Dann folgt: $X \circ Y\colon (\Omega_1, \mathfrak{S}_1) \to (\Omega_3, \mathfrak{S}_3)$.*

Satz 4.8. *Seien $X, Y : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, dann sind auch folgende Funktionen $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{B}$-messbar: $X + Y$, $X - Y$, $X \cdot Y$, X/Y (wenn definiert), $\min(X, Y)$, $\max(X, Y)$, $X^+ := \min(X, 0)$, $X^- := \min(-X, 0)$, $|X| := X^+ + X^-$. (Bei punktweiser Definition der Operationen.)*

Definition 4.9 (messbare Funktion)**.** Sei $(\Omega, \mathfrak{S})$ ein Messraum. Eine Funktion $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt *messbar*, wenn

$$X^{-1}(B) \in \mathfrak{S} \quad \forall B \in \mathfrak{B} \qquad \wedge \qquad X^{-1}(\pm\infty) \in \mathfrak{S}.$$

Satz 4.10. *Sei $(X_i)_{i\in N}$ eine Familie messbarer Funktionen. Dann sind auch*

$$\sup_n X_n,\ \inf_n X_n,\ \limsup_n X_n,\ \liminf_n X_n,\ \lim_{n\to\infty} X_n$$

messbar. (Letzteres nur wenn existent, also X_n punktweise konvergent.)

Definition 4.11 (Treppenfunktion)**.** Eine Funktion $t \colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn sie nur endlich viele verschiedene Werte $a_1, \ldots, a_n$ annimmt.

Satz 4.12. *Sei $t \colon (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ eine messbare Treppenfunktion. Dann kann t dargestellt werden als*

$$t(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}(x),$$

wobei die Mengen $A_i \in \mathfrak{S}$ eine disjunkte Zerlegung von Ω bilden.

Satz 4.13 (Approximation durch Treppenfunktionen)**.**
Sei $X \colon (\Omega, \mathfrak{S}) \to \big([0,\infty), \mathfrak{B}_{\cap[0,\infty)}\big)$. Dann existiert eine monoton wachsende Folge (t_n) von Treppenfunktionen $t_n \colon (\Omega, \mathfrak{S}) \to \big([0,\infty), \mathfrak{B}_{\cap[0,\infty)}\big)$, die punktweise gegen X konvergiert. Für eine beschränkte Funktion X kann die Folge (t_n) sogar gleichmäßig konvergent gewählt werden.

Definition 4.14 (System der Borel-messbaren Funktionen)**.** Man nennt die Menge aller $X \colon (\mathbb{R}, \mathfrak{B}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ das *System B der Borel-messbaren Funktionen.*

Das System C der stetigen Funktionen ist eine Teilmenge von B. Ist $X_n \in B$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist auch $\lim_{n\to\infty} X_n \in B$ (falls existent).

Definition 4.15 (System der Baire-Funktionen)**.** Das kleinste System von Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, das alle stetigen Funktionen enthält und gegenüber punktweiser Konvergenz abgeschlossen ist, wird das *System $\mathfrak{F}$ der Baire-Funktionen* genannt.

Satz 4.16. *Das System der Borel-messbaren Funktionen stimmt mit dem System der Baire-Funktionen überein: $B = \mathfrak{F}$.*

Definition 4.17 (erzeugte σ-Algebra)**.** Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Funktionen $X_i \colon \Omega \to \mathbb{R}$, dann bezeichnet $\sigma((X_i)_{i\in I})$ die kleinste σ-Algebra auf Ω bezüglich der alle X_i messbar sind. Insbesondere gilt $\sigma(X) = X^{-1}(\mathfrak{B})$ für $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Definition 4.18. In einem Messraum $(\Omega, \mathfrak{S})$ heißen zwei Elemente ω, ω' aus Ω *äquivalent*, wenn $\omega \in A \Leftrightarrow \omega' \in A$ für alle $A \in \mathfrak{S}$ gilt.

Satz 4.19. *Seien $X \colon (\Omega_1, \mathfrak{S}_1) \to (\Omega_2, \mathfrak{S}_2)$ und $Y \colon (\Omega_1, \mathfrak{S}_1) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, dann ist Y genau dann $\sigma(X)$-$\mathfrak{B}$-messbar, wenn es eine messbare Funktion $f \colon (\Omega_2, \mathfrak{S}_2) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit $Y = f \circ X$ gibt.*

Definition und Satz 4.20 (induziertes Maß)**.** *Sei $X \colon (\Omega, \mathfrak{S}, \mu) \to (\Omega', \mathfrak{S}')$, dann ist mit $\mu'(A') := \mu(X^{-1}(A'))$ ein Maß (genannt das von X* induzierte Maß*) auf $(\Omega', \mathfrak{S}')$ definiert. Für das von X induzierte Maß schreibt man auch μ^X oder μX^{-1}.*

Definition 4.21 (maßtreue Abbildung)**.** Eine messbare Funktion X zwischen $(\Omega_1, \mathfrak{S}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{S}_2, \mu_2)$ wird *maßtreu* genannt, wenn für alle $A \in \mathfrak{S}_2$: $\mu_1(X^{-1}(A)) = \mu_2(A)$ gilt.

Satz 4.22. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum,* $T\colon (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\Omega, \mathfrak{S})$ *maßtreu,* $X\colon (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ *und* $X_n := X \circ T^n$ *(*$T^0 = \mathrm{id}$*,* $T^n = T \circ T^{n-1}$*). Dann gilt für alle* $k, n \in \mathbb{N}$ *und Ereignisse* $B_0, \ldots, B_n$*:*

$$P([X_k \in B_0, X_{k+1} \in B_1, \ldots, X_{k+n} \in B_n]) = P([X_0 \in B_0, \ldots, X_n \in B_n]).$$

Man nennt so etwas einen *stark stationären Prozess.*

4.1 Konvergenzarten

Definition 4.23 (μ-fast überall)**.** Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum bzw. $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann gilt eine Aussage *μ-fast überall* bzw. *P-fast sicher*, wenn es eine μ- bzw. P-Nullmenge N gibt, so dass die Aussage auf ganz N^c gilt.

Abkürzend werden häufig die Bezeichnungen μ-fü bzw. μ-fs benutzt.

Definition und Satz 4.24 (Konvergenz μ-fast überall)**.** *Sei* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von messbaren Funktionen auf* $(\Omega, \mathfrak{S})$*. Man sagt,* (X_n) konvergiert μ-fast überall *gegen* X*, wenn es eine Menge* $N \in \mathfrak{S}$ *gibt mit* $\mu(N) = 0$ *und* X_n *konvergiert auf* N^c *punktweise gegen* X*.*
Das ist für endliche X_n, X *gleichwertig zu*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{k\geq n} [|X_k - X| > \epsilon]) = 0 \quad \forall \epsilon > 0.$$

Man schreibt $X_n \to X$ *μ-fast überall.*

Definition 4.25 (Konvergenz im Maß)**.** Eine Folge von messbaren Funktionen $X_n\colon (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ heißt *konvergent im Maß* (in der Wahrscheinlichkeit) gegen X, falls

$$\lim_{n\to\infty} \mu([|X_n - X| > \epsilon]) = 0 \quad \forall \epsilon > 0.$$

Man schreibt $X_n \xrightarrow{\mu} X$ bzw. $\mu\text{-}\lim_{n\to\infty} X_n = X$.

Definition 4.26 (Konvergenz μ-fast gleichmäßig)**.** Eine Folge von messbaren Funktionen X_n heißt *μ-fast gleichmäßig konvergent* gegen X falls

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N_\epsilon \in \mathfrak{S} \text{ mit } \mu(N_\epsilon) < \epsilon \text{ und } X_n \to X \text{ gleichmäßig auf } N_\epsilon^c.$$

Die Konvergenz μ-fast gleichmäßig ist etwas anderes als die gleichmäßige Konvergenz μ-fast überall.

Definition 4.27 (Cauchyfolge im Maß)**.** Man nennt eine Folge X_n von messbaren Funktionen eine *Cauchyfolge im Maß*, wenn

$$\lim_{n,m\to\infty} \mu([|X_n - X_m| > \epsilon]) = 0 \quad \forall \epsilon > 0.$$

Satz 4.28. *Für endliches μ gilt:*

- $X_n \to X$ *μ-fast überall* $\Rightarrow X_n \xrightarrow{\mu} X$ *im Maß;*
- *(Egoroff)* $X_n \to X$ *μ-fast überall* $\Rightarrow X_n \to X$ *μ-fast gleichmäßig.*

Satz 4.29. *Für jedes μ gilt*

- $(X_n) \to X$ *μ-fast gleichmäßig* $\Rightarrow X_n \xrightarrow{\mu} X$ *im Maß.*
- $X_n \xrightarrow{\mu} X \Rightarrow (X_n)$ *ist Cauchyfolge im Maß.*

Satz 4.30. *Sei (X_n) eine Cauchyfolge im Maß von messbaren Funktionen. Dann folgt:*

- *Es gibt eine Teilfolge (X_{n_k}) die fast gleichmäßig konvergiert.*
- *(X_n) konvergiert im Maß.*

Definition und Satz 4.31 (Essentielles Supremum)**.** *Das* essentielle Supremum *einer messbaren Funktion X ist*

$$\operatorname{ess\,sup} X := \inf \{c \in \mathbb{R} : \mu([|X| > c]) = 0\},$$

also das Infimum jener reellen Zahlen, die fast überall größer als $|X|$ sind. Es wird auch mit $\|X\|_\infty$ bezeichnet.
$\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm auf der Menge aller messbaren Funktionen faktorisiert nach $\{X : \operatorname{ess\,sup} X = 0\}$.

Satz 4.32. *Sei (X_n) eine Folge messbarer Funktionen, dann gilt*

$$X_n \to X \textit{ gleichmäßig fast überall } \Leftrightarrow \|X_n - X\|_\infty \to 0.$$

Definition und Satz 4.33. *Die Menge $\mathfrak{L}_\infty := \{X : \|X\|_\infty < \infty\}$ der μ-fast überall beschränkten messbaren Funktionen ist ein Vektorraum.*
Faktorisiert man $\mathfrak{L}_\infty$ wie oben, also

$$L_\infty := \{[X] := \{Y \in \mathfrak{L}_\infty : \|X - Y\|_\infty = 0\} : X \in \mathfrak{L}_\infty\}$$

(d. h. man sieht zwei Funktionen als gleich an, wenn sie fast überall übereinstimmen), dann erhält man einen Banachraum bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$.

4.2 Zufallsvariablen

Definition 4.34 (Zufallsvariable)**.** Sei $(\Omega_1, \mathfrak{S}_1, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\Omega_2, \mathfrak{S}_2)$ ein Messraum mit $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^m$, $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{B}_m \cap \mathfrak{P}(\Omega_2)$. Dann nennt man eine messbare Funktion $X\colon (\Omega_1, \mathfrak{S}_1) \to (\Omega_2, \mathfrak{S}_2)$ eine (m-dimensionale) *Zufallsvariable* (für $m \geq 2$ auch *Zufallsvektor*). Das von X induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß PX^{-1} auf Ω_2 nennt man die Verteilung von X und die entsprechende Verteilungsfunktion die Verteilungsfunktion von X. Ist $|X(\Omega_1)| \leq \aleph_0$, nennt man X *diskret.*

Satz 4.35 (Inversenmethode)**.** *Sei F eine Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion und U eine auf $(0,1)$ stetig gleichverteilte Zufallsvariable. Dann ist $Y := F^{-1} \circ U$ verteilt mit der Verteilungsfunktion F. (Dabei bezeichnet F^{-1} die verallgemeinerte Inverse von F.)*

Definition 4.36 (Dichte)**.** Lässt sich die Verteilungsfunktion F einer Zufallsvariable X darstellen als Integral $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ für eine nichtnegative Funktion f, dann heißt f die *Dichte* von X.

Definition 4.37 (stetige Zufallsvariable)**.** Man nennt eine Zufallsvariable *(absolut) stetig*, wenn sie eine Dichte besitzt.

Satz 4.38 (Transformation einer stetigen Zufallsvariablen)**.** [2] *Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f_X und $Y = \varphi(X)$ für eine streng monotone, stetig differenzierbare Funktion φ mit nicht verschwindender Ableitung. Dann ist die Verteilung von Y gegeben durch ihre Dichte f_Y mit*

$$f_Y = (f_X \circ \varphi^{-1}) \left| \frac{\mathrm{d}\varphi^{-1}}{\mathrm{d}y} \right|.$$

Satz 4.39. [3] *Seien X und Y wie im Satz oben definiert und sei φ zerlegbar in k streng monotone, stetig differenzierbare Teilstücke mit nicht verschwindender Ableitung (also es existiert eine disjunkte Zerlegung von $\mathbb{R}$ in Intervalle $I_1, \ldots, I_k$, so dass alle $\varphi_i := \varphi|_{I_i}$ die gewünschten Eigenschaften haben). Dann ist*

$$f_Y = \sum_{i=1}^{k} (f_X \circ \varphi_i^{-1}) \left| \frac{\mathrm{d}\varphi_i^{-1}}{\mathrm{d}y} \right|.$$

Definition und Satz 4.40 (gemeinsame Verteilung)**.** *Seien $X_1, \ldots, X_m$ Zufallsvariablen $(\Omega, \mathfrak{S}, P) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, dann heißt die durch $\mathsf{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ induzierte Verteilung $P\mathsf{X}^{-1}$ die* gemeinsame Verteilung *von $X_1, \ldots, X_m$. Ihre Verteilungsfunktion ist gegeben durch:*

$$F_{X_1,\ldots,X_m}(x_1, \ldots, x_m) := P\mathsf{X}^{-1}((-\infty, x_1^m]) =$$
$$P\left(\{\omega : X_1(\omega) \le x_1, \ldots, X_m(\omega) \le x_m\}\right).$$

Für Ereignisse A_i $(i = 1, \ldots, m)$ aus $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ gilt

$$P\mathsf{X}^{-1}\left(\prod_{i=1}^{m} A_i\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{m} X_i^{-1}(A_i)\right).$$

Definition und Satz 4.41 (Randverteilung)**.** *Unter den gleichen Voraussetzungen wie oben wird die gemeinsame Verteilung von $k \le m$ Zufallsvariablen aus $X_1, \ldots, X_m$ als* Randverteilung *dieser Zufallsvariablen bezeichnet.*

$$F_{X_1,\ldots,X_k}(x_1, \ldots, x_k) = F_{X_1,\ldots,X_m}(x_1, \ldots, x_k, \infty, \ldots, \infty).$$

Für jede beliebige Auswahl $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$ gilt die Aussage in analoger Form.

Insbesondere sind die eindimensionalen Randverteilungen PX_i^{-1} von Bedeutung.

Satz 4.42. *Hat $\mathsf{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ eine stetige Dichte $f(x_1, \ldots, x_m)$, dann hat auch X_i $(i \in \{1, \ldots, m\})$ eine stetige Dichte f_{X_i} mit*

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \ldots, x_m)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{i-1}\,\mathrm{d}x_{i+1} \ldots \mathrm{d}x_m.$$

[2] Die Aussage und Voraussetzungen dieses Satzes stimmen nicht ganz. Leider zitieren und verwenden (!) alle Quellen, die mir momentan vorliegen, den Satz sehr ungenau.

[3] Die gleiche Anmerkung gilt auch hier.

Definition 4.43. Zufallsvektoren $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_m$ mit $\mathsf{X}_i \colon (\Omega, \mathfrak{S}, P) \to (\mathbb{R}^{k_i}, \mathfrak{B}_{k_i})$ werden *unabhängig* genannt, wenn $\sigma(\mathsf{X}_1), \ldots, \sigma(\mathsf{X}_m)$ unabhängig sind.

Satz 4.44. *Zufallsvektoren $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_m$ wie oben sind genau dann unabhängig, wenn*

$$F_{\mathsf{X}_1 \ldots \mathsf{X}_m}(\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_m) = \prod_{i=1}^{m} F_{\mathsf{X}_i}(\mathsf{x}_i) \qquad \forall \mathsf{x}_i \in \mathbb{R}^{k_i}.$$

Satz 4.45. *Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_m$ mit Dichten f_{X_i} sind genau dann unabhängig, wenn*

$$f_{X_1 \ldots X_m}(x_1, \ldots, x_m) = \prod_{i=1}^{m} f_{X_i}(x_i) \qquad \forall x_i \in \mathbb{R}.$$

Satz 4.46. *Die Komponenten eines diskreten Zufallsvektors $\mathsf{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ (mit diskreten $X_i : (\Omega, \mathfrak{S}, P) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$) sind genau dann unabhängig, wenn*

$$P\mathsf{X}^{-1}\left((x_1, \ldots, x_m)\right) = \prod_{i=1}^{m} P X_i^{-1}(x_i) \qquad \forall (x_1, \ldots, x_m) \in \mathsf{X}(\Omega^m).$$

5 Integral und Erwartungswert

Definition 5.1. Es sei $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum. Folgende Bezeichnungen werden verwendet:

- $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(\Omega, \mathfrak{S}) := \{X : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}) : X \text{ ist Treppenfunktion}\}$ (messbare Treppenfunktionen),
- $\mathfrak{T}^+ = \{X \in \mathfrak{T} : X \geq 0\}$ (nichtnegative messbare Treppenfunktionen),
- $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Omega, \mathfrak{S}) := \{X : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})\}$ (messbare Funktionen),
- $\mathfrak{M}^+ = \{X \in \mathfrak{M} : X \geq 0\}$ (nichtnegative messbare Funktionen).

Definition 5.2. In der Maßtheorie gilt als Konvention: $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

Definition 5.3 (Integral (einer nichtnegativen Treppenfunktion))**.**
Sei $X \in \mathfrak{T}^+$ auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ mit einer Darstellung $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ nach Satz 4.12. Dann ist das *Integral von X bezüglich μ* definiert durch

$$\int X \,\mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i).$$

Definition 5.4 (Integral (einer nichtnegativen messbaren Funktion))**.**
Für $X \in \mathfrak{M}^+$ auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ist das *Integral von X bezüglich μ* definiert durch

$$\int X \,\mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int T \,\mathrm{d}\mu : T \in \mathfrak{T}^+ \wedge T \leq X \right\}.$$

Definition 5.5 (Integral (einer messbaren Funktion))**.**
Sei $X \in \mathfrak{M}$. Dann ist X darstellbar als $X = X^+ - X^-$ und die Integrale $\int X^+ \,\mathrm{d}\mu$, $\int X^- \,\mathrm{d}\mu$ sind wohldefiniert. Wenn mindestens eines dieser Integrale endlich ist, dann definiert man das *Integral* von X durch

$$\int X \,\mathrm{d}\mu := \int X^+ \,\mathrm{d}\mu - \int X^- \,\mathrm{d}\mu.$$

Sind beide Integrale endlich, dann ist $\int X \,\mathrm{d}\mu$ endlich, und man nennt X *integrierbar* (bezüglich μ). Sind beide unendlich, dann existiert das Integral von X nicht.
Die Menge aller integrierbaren Funktionen auf einen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ wird bezeichnet mit $\mathfrak{L}_1(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$.

Anmerkung: Um anzudeuten, über welche Variable integriert wird, schreibt man häufig $\int X(\omega) \,\mathrm{d}\mu(\omega)$ oder $\int X(\omega) \,\mu(\mathrm{d}\omega)$. Ist F eine Verteilungsfunktion von μ_F, so schreibt man manchmal auch $\int X \,\mathrm{d}F$.

Satz 5.6. *Ist $X \in \mathfrak{L}_1(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$, so gilt $\mu\left([|X| = \infty]\right) = 0$.*

Definition 5.7 (Erwartungswert)**.** Ist $X \in \mathfrak{M}(\Omega, \mathfrak{S})$ eine Zufallsvariable und P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf diesem Raum, dann nennt man das Integral von X bezüglich P den *Erwartungswert* $\mathbb{E}X$ von X.

Definition 5.8 (Integral über einer Menge)**.** Sei $X \in \mathfrak{M}(\Omega, \mathfrak{S})$ und $A \in \mathfrak{S}$. Dann ist das *Integral von X über A* definiert als

$$\int_A X \, \mathrm{d}\mu := \int X \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\mu.$$

Existiert $\int X \, \mathrm{d}\mu$, dann existiert auch $\int_A X \, \mathrm{d}\mu$.

Hilfssatz 5.9. *In einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ gilt für jede Menge $A \subseteq \Omega$:*

- $X \in \mathfrak{M}(A, \mathfrak{S}_{\cap A}) \Leftrightarrow X\mathbf{1}_A \in \mathfrak{M}(\Omega, \mathfrak{S})$,
- $X \in \mathfrak{M}^+(A, \mathfrak{S}_{\cap A}) \Leftrightarrow X\mathbf{1}_A \in \mathfrak{M}^+(\Omega, \mathfrak{S})$,
- $\int X \, \mathrm{d}\mu_{|A} = \int X\mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\mu = \int_A X \, \mathrm{d}\mu$.

Satz 5.10. *Seien $X, Y \in \mathfrak{M}$ mit existierenden Integralen $\int X \, \mathrm{d}\mu$ und $\int Y \, \mathrm{d}\mu$. Dann gilt:*

- $X \leq Y$ *μ-fast überall* $\Rightarrow \int X \, \mathrm{d}\mu \leq \int Y \, \mathrm{d}\mu$;
- $X = Y$ *μ-fast überall* $\Rightarrow \int X \, \mathrm{d}\mu = \int Y \, \mathrm{d}\mu$;
- $c \in \mathbb{R}$: $c \int X \, \mathrm{d}\mu = \int cX \, \mathrm{d}\mu$ *(das rechte Integral existiert dann);*
- $\int X \, \mathrm{d}\mu + \int Y \, \mathrm{d}\mu = \int (X + Y) \, \mathrm{d}\mu$, *falls der linke Ausdruck wohldefiniert ist (das rechte Integral existiert dann);*
- *für* $X \in \mathfrak{M}^+$: $X = 0$ *μ-fast überall* $\Leftrightarrow \int X \, \mathrm{d}\mu = 0$.

Anmerkung: $\mathfrak{L}_1$ ist also ein Vektorraum.
Für komplexwertige X definiert man $\int X \, \mathrm{d}\mu := \int \mathrm{Re} X \, \mathrm{d}\mu + i \int \mathrm{Im} X \, \mathrm{d}\mu$.

Satz 5.11 (Beppo Levi; Konvergenz durch Monotonie)**.** *Sei $(X_n) \in \mathfrak{M}^{\mathbb{N}}$ von unten konvergent gegen $X \in \mathfrak{M}$ und es existiere ein messbares $Y \leq X_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) mit $\int Y^- \, \mathrm{d}\mu < \infty$, dann gilt*

$$\int X \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int X_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Analoges gilt für eine von oben konvergente Folge die nach oben beschränkt ist durch ein Y mit $\int Y^+ < \infty$.

Das gilt insbesondere auch für die Approximation durch Treppenfunktionen nach Satz 4.13, was manchmal als Definition des Integrals (für positive messbare Funktionen) verwendet wird.

Hilfssatz 5.12 (Lemma von Fatou)**.** *Sei $(X_n) \in \mathfrak{M}^{\mathbb{N}}$.*

- *Existiert ein $Y \in \mathfrak{M}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : Y \leq X_n$ und $\int Y^- \, \mathrm{d}\mu < \infty$, dann gilt* $\int \liminf X_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf \int X_n \, \mathrm{d}\mu$.
- *Existiert ein $Y \in \mathfrak{M}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : Y \geq X_n$ und $\int Y^+ \, \mathrm{d}\mu < \infty$, dann gilt* $\int \limsup X_n \, \mathrm{d}\mu \geq \limsup \int X_n \, \mathrm{d}\mu$.
- *Existiert ein $Y \in \mathfrak{M}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : Y \geq |X_n|$ und $\int Y \, \mathrm{d}\mu < \infty$, dann gilt* $\int \liminf X_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf \int X_n \, \mathrm{d}\mu \leq \limsup \int X_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int \limsup X_n \, \mathrm{d}\mu$.

Satz 5.13 (Lebesgue; Konvergenz durch Majorisierung)**.** *Sei $(X_n) \in \mathfrak{M}^{\mathbb{N}}$ und es gebe ein integrierbares Y mit $|X_n| \leq Y$. Wenn $\lim\limits_{n \to \infty} X_n$ existiert ist*

$$\int \lim_{n \to \infty} X_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int X_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Satz 5.14. *Die Konvergenzsätze sind auch gültig, wenn die Voraussetzungen nur μ-fast überall erfüllt werden.*

Definition 5.15 (Integral (einer μ-fast überall messbare Funktion))**.**
Eine Funktion X auf $(\Omega, \mathfrak{S})$ heißt *μ-fast überall messbar*, wenn es ein $N \in \mathfrak{S}$ gibt mit $\mu(N) = 0$ und $X|_{N^c}$ ist $(N^c, \mathfrak{S}_{\cap N^c})$-messbar. Das *Integral* von X ist dann definiert durch

$$\int X \,\mathrm{d}\mu := \int X \mathbf{1}_{N^c} \,\mathrm{d}\mu,$$

falls das rechte Integral existiert.

Satz 5.16. *Seien $X, Y \in \mathfrak{L}_1(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$. Aus $\int_A X \,\mathrm{d}\mu \leq \int_A Y \,\mathrm{d}\mu$ für alle $A \in \mathfrak{S}$ folgt $X \leq Y$ μ-fast überall.*

Satz 5.17. *Es sei μ σ-endlich und $\int X \,\mathrm{d}\mu$, $\int Y \,\mathrm{d}\mu$ existiere. Dann folgt aus $\int_A X \,\mathrm{d}\mu \leq \int_A Y \,\mathrm{d}\mu$ für alle $A \in \mathfrak{S}$, dass $X \leq Y$ μ-fast überall.*

Satz 5.18. *Sei $(X_\alpha)_{\alpha \in [a,b]}$ eine Familie von μ-fast überall messbaren Funktionen, $\alpha_0 \in (a, b)$ und $\lim_{\alpha \to \alpha_0} X_\alpha = X_{\alpha_0}$ μ-fast überall (also $\alpha \mapsto X_\alpha$ an α_0 stetig). Wenn es eine integrierbare Funktion Y und ein $\epsilon > 0$ gibt für die $\forall \alpha \in (\alpha_0 - \epsilon, \alpha_0 + \epsilon) : |X_\alpha| \leq Y$ gilt, dann dürfen Limes und Integral vertauscht werden:*

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \int X_\alpha \,\mathrm{d}\mu = \int X_{\alpha_0} \,\mathrm{d}\mu.$$

Satz 5.19. *Seien (X_α) und $\frac{\partial X_\alpha}{\partial \alpha}$ messbar für alle α aus einer Umgebung von $\alpha_0 \in \mathbb{R}$. Wenn es eine eine integrierbare Funktion Y und ein $\epsilon > 0$ gibt mit $\forall \alpha \in (\alpha_0 - \epsilon, \alpha_0 + \epsilon) : \left| \frac{X_\alpha - X_{\alpha_0}}{\alpha - \alpha_0} \right| \leq Y$, dann gilt*

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int X_\alpha \,\mathrm{d}\mu \Big|_{\alpha = \alpha_0} = \int \frac{\partial X_\alpha}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = \alpha_0} \mathrm{d}\mu.$$

Als Voraussetzung kann auch $\left| \frac{\partial X_\alpha}{\partial \alpha} \right| \leq Y$ in einer Umgebung von α_0 genommen werden.

Satz 5.20 (Zusammenhang von Lebesgue- und Riemann-Integral)**.**
Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie λ-fast überall stetig ist. In diesem Fall existiert auch das Lebesgue-Integral und es gilt:

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{(a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda.$$

Das Lebesgue-Integral ist also eine echte Verallgemeinerung des Riemann-Integrals.

Satz 5.21. *Sei $X \in \mathfrak{M}^+$, $(A_n) \in \mathfrak{S}^{\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt. Dann gilt:*

$$\int_{\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n} X \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} X \,\mathrm{d}\mu.$$

Daher ist die Abbildung $\nu : A \mapsto \int_A X \,\mathrm{d}\mu$ ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{S})$.

Definition 5.22 (absolute Stetigkeit, Dichte)**.** Seien μ, ν Maße auf $(\Omega, \mathfrak{S})$. Man nennt ν *absolut stetig bezüglich* μ (in Zeichen $\nu \ll \mu$), wenn für alle $A \in \mathfrak{S}$ mit $\mu(A) = 0$ auch $\nu(A) = 0$ gilt.
Falls ν als Integral $\nu(A) = \int_A X \, \mathrm{d}\mu$ für ein messbares X darstellbar ist, nennt man X die *Dichte* von ν bezüglich μ.

Satz 5.23. *Seien $X, Y \in \mathfrak{M}^+(\Omega, \mathfrak{S})$ und $\nu(A) := \int_A X \, \mathrm{d}\mu$. Dann gilt*

$$\int Y \, \mathrm{d}\nu = \int YX \, \mathrm{d}\mu,$$

falls eines der beiden Integrale existiert. Außerdem gilt:

$$Y \in \mathfrak{L}_1(\Omega, \mathfrak{S}, \nu) \Leftrightarrow XY \in \mathfrak{L}_1(\Omega, \mathfrak{S}, \mu).$$

Ist G die Verteilungsfunktion von μ_G, und lässt sich G als Stammfunktion von g darstellen (also $\mu_G((a,b]) = G(b) - G(a) = \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x = \int_{(a,b]} g \, \mathrm{d}\lambda$), so gilt für Riemann-integrierbare f

$$\int\limits_{(a,b]} f \, \mathrm{d}\mu_G = \int\limits_{(a,b]} fg \, \mathrm{d}\lambda = \int_a^b fg \, \mathrm{d}x.$$

(vgl. Riemann-Stieltjes-Integral)

Satz 5.24 (Substitutionsregel)**.** *Sei $(\Omega_1, \mathfrak{S}_1, \mu)$ ein Maßraum und $T\colon (\Omega_1, \mathfrak{S}_1) \to (\Omega_2, \mathfrak{S}_2)$. Dann gilt*

$$X \in \mathfrak{L}_1(\Omega_2, \mathfrak{S}_2, \mu T^{-1}) \Leftrightarrow X \circ T \in \mathfrak{L}_1(\Omega_1, \mathfrak{S}_1, \mu),$$

und in diesem Fall

$$\int X \circ T \, \mathrm{d}\mu = \int X \, \mathrm{d}\mu T^{-1}.$$

Satz 5.25 ("partielle Integration")**.** *Seien F und G Verteilungsfunktionen und $\widetilde{G}(x) := G(x-) := \lim_{h \to x-} G(h)$. Dann gilt:*

$$\int_{(a,b]} F \, \mathrm{d}\mu_G + \int_{(a,b]} \widetilde{G} \, \mathrm{d}\mu_F = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Falls $F' = f$ und $G' = g$ folgt: $\int_a^b Fg \, \mathrm{d}x + \int_a^b fG \, \mathrm{d}x = FG|_a^b$, also die bei Riemann-Integralen bekannte partielle Integration.

5.1 Produkträume – Satz von Fubini

Definition 5.26 (Produktsigmaalgebra)**.** Seien $\mathfrak{S}_i$ σ-Algebren über Ω_i, dann wird

$$\mathfrak{S}_1 \otimes \mathfrak{S}_2 := \mathfrak{A}_\sigma \left(\{A_1 \times A_2 : A_i \in \mathfrak{S}_i\} \right)$$

ihre *Produktsigmaalgebra* genannt.

Definition 5.27 (Schnitte)**.** $\omega_i \in \Omega_i$:

- Es sei $C \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$. Dann heißt $C_{\omega_1} := \{\omega_2 \in \Omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in C\}$ der *Schnitt von C in ω_1*. (Analog: C_{ω_2}).
- Es sei $X\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega'$. Dann heißt $X_{\omega_1}\colon \Omega_2 \to \Omega' : \omega_2 \mapsto X(\omega_1, \omega_2)$ der *Schnitt von X in ω_1*. (Analog: X_{ω_2})

Hilfssatz 5.28. *Für $\omega_i \in \Omega_i$, $A \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ gilt:*

- *Schnitte sind operationstreu:*
  - $\mathbf{1}_{A_{\omega_i}} = (\mathbf{1}_A)_{\omega_i}$,
  - $(A^c)_{\omega_i} = (A_{\omega_i})^c$,
  - $(\bigcup A_n)_{\omega_i} = \bigcup A_{n\omega_i}$,
  - $(\bigcap A_n)_{\omega_i} = \bigcap A_{n\omega_i}$,
  - $(A_1 \times A_2)_{\omega_1} = \begin{cases} A_2 & ,\omega_1 \in A_1 \\ \emptyset & ,\omega_1 \notin A_1 \end{cases}$ $(A_i \in \mathfrak{S}_i)$,
- $C \in \mathfrak{S}_1 \otimes \mathfrak{S}_2 \Rightarrow C_{\omega_1} \in \mathfrak{S}_2, C_{\omega_2} \in \mathfrak{S}_1$.
- $X\colon (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{S}_1 \otimes \mathfrak{S}_2) \to (\Omega', \mathfrak{S}') \Rightarrow X_{\omega_1}\colon (\Omega_2, \mathfrak{S}_2) \to (\Omega', \mathfrak{S}')$, $X_{\omega_2}\colon (\Omega_1, \mathfrak{S}_1) \to (\Omega', \mathfrak{S}')$.

Definition und Satz 5.29 (Maß auf dem Produktraum)**.** *Sei $(\Omega_1, \mathfrak{S}_1, \mu_1)$ ein σ-endlicher Maßraum und $(\Omega_2, \mathfrak{S}_2)$ ein Messraum. Eine reellwertige Funktion $\tilde{\mu}\colon \Omega_1 \times \mathfrak{S}_2 \to \mathbb{R}$ erfülle*

- *$\forall \omega_1 \in \Omega_1$ ist $\tilde{\mu}(\omega_1, \cdot)$ ein Maß auf $(\Omega_2, \mathfrak{S}_2)$;*
- *$\tilde{\mu}(\omega_1, \cdot)$ ist gleichmäßig σ-endlich bezüglich $\omega_1 \in \Omega_1$[4];*
- *$\forall A \in \mathfrak{S}_2$ ist $\tilde{\mu}(\cdot, A)\colon (\Omega_1, \mathfrak{S}_1) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ messbar.*

Dann wird mit

$$\mu(C) := \int_{\Omega_1} \tilde{\mu}(\omega_1, C_{\omega_1})\,\mathrm{d}\mu_1(\omega_1)$$

ein Maß auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{S}_1 \otimes \mathfrak{S}_2)$ gebildet, das $\mu(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} \tilde{\mu}(\omega_1, A_2)\,\mathrm{d}\mu_1(\omega_1)$ erfüllt. μ ist das einzige Maß auf $\mathfrak{S}_1 \otimes \mathfrak{S}_2$, das diese Bedingung für alle $A_i \in \mathfrak{S}_i$ erfüllt.
Ist insbesondere auch $(\Omega_2, \mathfrak{S}_2, \mu_2)$ ein σ-endlicher Maßraum, kann man $\tilde{\mu}(\cdot, A) \equiv \mu_2(A)$ setzen und erhält das Produktmaß

$$\mu_1 \otimes \mu_2(C) := \int_{\Omega_1} \mu_2(C_{\omega_1})\,\mathrm{d}\mu_1(\omega_1).$$

Es ist dann $\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$. $\mu_1 \otimes \mu_2$ ist durch diese Eigenschaft eindeutig festgelegt.

Satz 5.30 (Fubini)**.** *Sei $(\Omega_1, \mathfrak{S}_1, \mu_1)$ ein σ-endlicher Maßraum, $(\Omega_2, \mathfrak{S}_2)$ ein Messraum und $\tilde{\mu}(\cdot, \cdot)$, $\mu(\cdot)$ seien wie oben definiert.*

1. *Ist $X \in \mathfrak{M}^+(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{S}_1 \otimes \mathfrak{S}_2)$, dann auch*

$$\forall \omega_1 \in \Omega_1 : \int_{\Omega_2} X_{\omega_1} \tilde{\mu}(\omega_1, \,\mathrm{d}\omega_2) \in \mathfrak{M}^+(\Omega_1, \mathfrak{S}_1)$$

und

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} X\,\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} X_{\omega_1} \tilde{\mu}(\omega_1, \,\mathrm{d}\omega_2) \right) \mu_1(\,\mathrm{d}\omega_1).$$

[4] D. h. $\exists (E_n) \in \mathfrak{P}(\Omega_2)^{\mathbb{N}}$ mit $\bigcup E_n = \Omega_2$, E_n sind paarweise disjunkt und $\forall n \in \mathbb{N}$: $\sup\limits_{\omega_1 \in \Omega_1} \tilde{\mu}(\omega_1, E_n) < \infty$.

2. *Ist $X \in \mathfrak{L}_1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{S}_1 \otimes \mathfrak{S}_2, \mu)$, dann auch*

$$\forall \omega_1 \in \Omega_1 : \int_{\Omega_2} X_{\omega_1} \tilde{\mu}(\omega_1, \mathrm{d}\omega_2) \in \mathfrak{L}_1(\Omega_1, \mathfrak{S}_1, \mu_1)$$

und

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} X \,\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} X_{\omega_1} \tilde{\mu}(\omega_1, \mathrm{d}\omega_2) \right) \mu_1(\mathrm{d}\omega_1).$$

3. *Ist $X \in \mathfrak{M}(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{S}_1 \otimes \mathfrak{S}_2)$, und $\int X \,\mathrm{d}\mu$ existiert, dann gilt*

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} X \,\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} X_{\omega_1} \tilde{\mu}(\omega_1, \mathrm{d}\omega_2) \right) \mu_1(\mathrm{d}\omega_1).$$

Satz 5.31 (Fubini für Produktmaß)**.** *Es seien $(\Omega_i, \mathfrak{S}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ zwei σ-endliche Maßräume. Ist $X \in \mathfrak{M}(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{S}_1 \otimes \mathfrak{S}_2)$ und existiert das Integral $\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} X \,\mathrm{d}\mu_1 \otimes \mu_2$, so existieren auch die iterierten Integrale und die Integrationsreihenfolge darf vertauscht werden:*

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} X \,\mathrm{d}\mu_1 \otimes \mu_2 =$$

$$= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} X_{\omega_1} \,\mathrm{d}\mu_2(\omega_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(\omega_1) =$$

$$= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} X_{\omega_2} \,\mathrm{d}\mu_1(\omega_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(\omega_2).$$

Die Existenz beider iterierten Integrale ist hingegen nicht hinreichend für ihre Gleichheit.

5.2 Weiteres

Satz 5.32. *Sei Z eine Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion F. Dann ist $F \circ Z$ stetig gleichverteilt auf $(0, 1)$.*

Satz 5.33. *Sei μ_G ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit Dichte g. Dann ist $\mu_G G^{-1} = \lambda$ und*

$$\int_{(a,b]} f(G(x)) g(x) \,\mathrm{d}x = \int_{(a,b]} f \circ G \,\mathrm{d}\mu_G =$$

$$= \int_{G((a,b])} f \,\mathrm{d}\mu_G G^{-1} = \int_{(G(a),G(b)]} f(y) \,\mathrm{d}y.$$

Vgl. auch Sätze 5.23 und 5.24.

Satz 5.34. *Ist $Y : (\Omega, \mathfrak{S}, P) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}, PY^{-1})$ eine Zufallsvariable, so gilt:*

$$\mathbb{E}Y = \int Y(\omega) \,\mathrm{d}P(\omega) = \int y \,\mathrm{d}PY^{-1}(y).$$

6 Signierte Maße

Definition 6.1 (signierte Maßfunktion)**.** Eine Funktion $\nu\colon \mathfrak{S} \to (-\infty, +\infty]$ oder $\nu\colon \mathfrak{S} \to [-\infty, +\infty)$ heißt *signierte Maßfunktion*, wenn

1. $\nu(\emptyset) = 0$,
2. $\nu(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu(A_n)$ für paarweise disjunkte $A_n \in \mathfrak{S}$, falls die Summe wohldefiniert ist.

Für $X \in \mathfrak{M}$ mit existierendem Integral, ist ν mit $\nu(A) := \int_A X \,\mathrm{d}\mu$ eine signierte Maßfunktion, die sich als Differenz der Maße $\int_A X^+ \,\mathrm{d}\mu$ und $\int_A X^- \,\mathrm{d}\mu$ schreiben lässt.

6.1 Zerlegungen

Definition 6.2. Sei ν ein signiertes Maß auf $(\Omega, \mathfrak{S})$. Eine Menge $A \subseteq \Omega$ heißt

1. *positiv*, wenn $\forall B \in \mathfrak{S}, B \subseteq A : \nu(B) \geq 0$;
2. *negativ*, wenn $\forall B \in \mathfrak{S}, B \subseteq A : \nu(B) \leq 0$;
3. *ν-Nullmenge*, wenn $\forall B \in \mathfrak{S}, B \subseteq A : \nu(B) = 0$.

Definition 6.3 (Hahn-Zerlegung)**.** Eine disjunkte Zerlegung (N, P) von Ω in messbare Mengen heißt *Hahn-Zerlegung* eines signierten Maßes ν, wenn N negativ und P positiv ist.

Hilfssatz 6.4. *Sei ν ein signiertes Maß: (alle Mengen messbar)*

- $|\nu(A)| < \infty \Rightarrow \forall B \subseteq A : |\nu(B)| < \infty$*;*
- $A_n \nearrow A \Rightarrow \nu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \nu(A_n)$ *(Stetigkeit von unten);*
- $A_n \searrow A,\ \exists n_0 : |\nu(A_{n_0})| < \infty \Rightarrow \nu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \nu(A_n)$ *(Stetigkeit von oben);*
- $\nu\colon \mathfrak{S} \to (-\infty, \infty],\ \nu(A) < \infty \Rightarrow \exists N \subseteq A : N$ *ist negativ* $\wedge\, \nu(N) \leq \nu(A)$*.*

Satz 6.5 (Zerlegungssatz von Hahn)**.** *Zu jedem signierten Maß gibt es eine Hahn-Zerlegung.*

Satz 6.6. *Sind (P_1, N_1), (P_2, N_2) zwei Hahn-Zerlegungen eines signierten Maßes ν, dann sind $P_1 \triangle P_2$ und $N_1 \triangle N_2$ ν-Nullmengen.*

Definition 6.7 (singuläre Maße)**.** Zwei signierte Maße ν und μ heißen *zu einander singulär* (in Zeichen $\nu \perp \mu$), wenn es eine disjunkte Zerlegung (A, B) von Ω gibt, so dass A eine ν-Nullmenge und B eine μ-Nullmenge ist.

Definition 6.8 (Variation eines signierten Maßes)**.** Sei (P, N) eine Hahn-Zerlegung für das signierte Maß ν. Es heißt

- $\nu^+(A) := \nu(A \cap P)$ die *obere Variation*,
- $\nu^-(A) := -\nu(A \cap N)$ die *untere Variation*,
- $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ die *Totalvariation* von ν.

Die Definition ist unabhängig von der gewählten Zerlegung.

Definition 6.9 (Jordan-Zerlegung)**.** Lässt sich ein signiertes Maß ν als Differenz zweier zueinander singulärere Maße ν_1, ν_2, von denen mindestens eines endlich ist, darstellen, so nennt man (ν_1, ν_2) eine *Jordan-Zerlegung* von ν.

Satz 6.10. *Zu jedem signierten Maß ν existiert genau eine Jordan-Zerlegung und zwar (ν^+, ν^-).*

6.2 Satz von Radon-Nikodym

Satz 6.11 (Lebesgue-Zerlegung). *Seien μ, ν σ-endliche Maße. Dann existiert eine eindeutige Darstellung (genannt* Lebesgue-Zerlegung*) von ν als Summe zweier Maße ν_c, ν_s mit $\nu_c \ll \mu$ und $\nu_s \perp \mu$.*

Satz 6.12 (Radon-Nikodym). *Seien ν, μ σ-endliche Maße auf $(\Omega, \mathfrak{S})$ mit $\nu \ll \mu$. Dann besitzt ν eine Dichte $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \in \mathfrak{M}^+(\Omega, \mathfrak{S})$ bezüglich μ:*

$$\nu(A) = \int_A \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \,\mathrm{d}\mu.$$

$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ ist μ-fast überall eindeutig bestimmt.

Satz 6.13 (Kettenregel). *Seien ν, μ und ρ σ-endliche Maße mit $\nu \ll \mu \ll \rho$, dann gilt*

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\rho} = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \cdot \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\rho}.$$

Insbesondere, falls $\nu \ll \mu$ und $\mu \ll \nu$,

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} = \left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\right)^{-1}.$$

Siehe auch Satz A.15.

6.3 Zusammenhang mit reellen Funktionen

Satz 6.14. *Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Dann ist $\nu \ll \mu$ genau dann, wenn $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \nu(A) < \epsilon$ für alle $A \in \mathfrak{S}$ mit $\mu(A) < \delta$.*

Definition 6.15 (absolute Stetigkeit reeller Funktionen). Man nennt eine reelle Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *absolut stetig*, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für jede Familie paarweise disjunkter Intervalle $((a_i, b_i])_{i=1\ldots m}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon.$$

Satz 6.16. *Ist F die Verteilungsfunktion eines L-S-Maßes μ_F, dann ist $\mu_F \ll \lambda$ genau dann, wenn für alle Intervalle $[a,b]$ die Funktion $F|_{[a,b]}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ absolut stetig ist.*

Satz 6.17 (Satz von Lebesgue). *Ist $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ von beschränkter Schwankung, dann ist F λ-fast überall differenzierbar.*
Ist F zusätzlich monoton, so gilt für alle $x \in [a,b]$

$$\int_{(a,x]} F' \,\mathrm{d}\lambda \leq F(x) - F(a).$$

Satz 6.18 (Hauptsatz der Integral und Differentialrechnung für Lebesgue-Integrale). *$F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist absolut stetig genau dann, wenn F λ-fast überall differenzierbar ist und für alle $x \in [a,b]$ gilt:*

$$\int_{(a,x]} F' \,\mathrm{d}\lambda = F(x) - F(a).$$

Vgl. Satz A.14.

Definition 6.19 (Differential von signierten Maßen)**.** Sei μ ein signiertes Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Sei $\mathfrak{C}_n(x) := \left\{C \subset \mathbb{R} : C \text{ offenes Intervall},\ x \in C,\ \lambda(C) < \frac{1}{n}\right\}$. Es heißt

- $\overline{\mathrm{D}}\mu(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{C \in \mathfrak{C}_n(x)} \dfrac{\mu(C)}{\lambda(C)}$ das *obere Differential* von μ und
- $\underline{\mathrm{D}}\mu(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{C \in \mathfrak{C}_n(x)} \dfrac{\mu(C)}{\lambda(C)}$ das *untere Differential* von μ.

Wenn $-\infty < \overline{\mathrm{D}}\mu(x) = \underline{\mathrm{D}}\mu(x) < +\infty$, dann nennt man μ an x *differenzierbar* mit *Differential* $\mathrm{D}\mu(x) := \overline{\mathrm{D}}\mu(x)$.

Satz 6.20. *Sei μ ein signiertes Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Dann sind $\overline{\mathrm{D}}\mu$, $\underline{\mathrm{D}}\mu$, $\mathrm{D}\mu$ (sofern existent) messbare Funktionen.*

Satz 6.21. *Ist für ein L-S-Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit $\mu(A) = 0$. Dann ist μ auf A differenzierbar und es ist $\mathrm{D}\mu(A) = 0$ λ-fast überall auf A.*

Siehe auch Satz A.14.

7 $\mathfrak{L}_p$-Räume

Definition 7.1 ($\mathfrak{L}_p$-Raum)**.** Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum und $p \in [1, \infty)$. Es sei

$$\mathfrak{L}_p := \left\{ X \in \mathfrak{M}(\Omega, \mathfrak{S}) : \int |X|^p \, \mathrm{d}\mu < \infty \right\}$$

und

$$\mathfrak{L}_\infty := \{ X \in \mathfrak{M}(\Omega, \mathfrak{S}) : \operatorname{ess\,sup} |X| < \infty \} .$$

Satz 7.2. *Für alle $p \in [1, \infty]$ ist $\mathfrak{L}_p$ ein Vektorraum (über $\mathbb{R}$).*

Definition und Satz 7.3 (Seminorm auf $\mathfrak{L}_p$)**.** *Die Abbildung*

$$\|X\|_p := \left(\int |X|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}$$

ist eine Seminorm auf dem Vektorraum $\mathfrak{L}_p$.

Definition und Satz 7.4. *Der Raum*

$$L_p := \mathfrak{L}_p / \ker(\| \cdot \|_p)$$

mit der Norm $\| \cdot \|_p$ ist ein Banachraum.

Definition 7.5. Die Konvergenz bezüglich $\| \cdot \|_p$, $1 \leq p < \infty$ wird auch *Konvergenz im p-ten Mittel* genannt.

Definition 7.6 (Konvexe und konkave Funktionen)**.** Eine Funktion f heißt auf einem Intervall I *konvex*, wenn für alle $x, y \in I$ und alle $\alpha \in [0, 1]$ gilt:

$$f(\alpha x + (1 - \alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y).$$

Eine Funktion heißt *konkav*, wenn

$$f(\alpha x + (1 - \alpha) y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y).$$

Satz 7.7. *Konvexe und konkave Funktionen sind im Inneren des Intervalls stetig und es existieren dort die einseitigen Ableitungen ($\mathrm{D}^r f$ und $\mathrm{D}^l f$). Bei konvexen Funktionen liegen die Tangenten immer unterhalb des Funktionsgraphes, bei konkaven oberhalb.*

Satz 7.8 (Jensen-Ungleichung)**.** *Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, X eine Zufallsvariable und f auf dem Bildbereich von X konvex. Dann gilt*

$$f(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E} f(X)$$

(also $f\left(\int X \, \mathrm{d}P\right) \leq \int f(X) \, \mathrm{d}P$), falls die Erwartungswerte existieren.
Für konkave Funktionen gilt die Ungleichung mit umgedrehtem Ungleichheitszeichen.

Satz 7.9 (Hölder-Ungleichung)**.** *Seien $p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $X \in \mathfrak{L}_p$, $Y \in \mathfrak{L}_q$ dann gilt*

$$\|XY\|_1 = \int |XY| \, \mathrm{d}\mu \leq \|X\|_p \cdot \|Y\|_q .$$

Anmerkung: Der Spezialfall $p = q = \frac{1}{2}$ wird auch *Cauchy-Schwarz-Ungleichung* genannt.

Satz 7.10 (Minkowski-Ungleichung (Dreiecksungleichung)).
Seien $X, Y \in \mathfrak{L}_p$, dann gilt:

$$\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p.$$

Satz 7.11 (Markov-Ungleichung). *Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum und $X \in \mathfrak{L}_p$, $p < \infty$. Dann gilt für $c > 0$:*

$$\mu([|X| \geq c]) \leq \frac{\int |X|^p \, \mathrm{d}\mu}{c^p}.$$

Satz 7.12 (Tschebyschow-Ungleichung (auch Tschebyscheff)). *Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \in \mathfrak{L}_2$ (also X habe endliche Varianz) und $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, dann gilt*

$$P((X - \mathbb{E}X)^2 \geq \epsilon^2) = P(|X - \mathbb{E}X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2}{\epsilon^2}.$$

Mit der Varianz $\sigma^2 = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$ von X gilt für $\lambda \in \mathbb{R}^+$

$$P([|X - \mathbb{E}X| \geq \sqrt{\lambda}\sigma]) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Satz 7.13. *Für unabhängige Zufallsvariablen $X, Y \in \mathfrak{L}_1$ gilt:*

$$\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y.$$

Satz 7.14. *Sei (X_n) eine Folge von Funktionen aus $\mathfrak{L}_p$, die bezüglich $\|\cdot\|_p$ nach X konvergiert (bzw. eine Cauchyfolge ist). Dann konvergiert (X_n) auch im Maß nach X (bzw. ist eine Cauchyfolge im Maß).*

Satz 7.15. *Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $1 \leq p \leq q$. Dann ist $\mathfrak{L}_q \subseteq \mathfrak{L}_p$. Für jede Folge (X_n) aus $\mathfrak{L}_q$ gilt: $\|X_n - X\|_q \to 0 \Rightarrow \|X_n - X\|_p \to 0$.*

Satz 7.16. *Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und (X_n) eine Folge aus $\mathfrak{L}_p$, die μ-fü gleichmäßig gegen X konvergiert. Dann liegt X in $\mathfrak{L}_p$ und X_n konvergiert auch im p-ten Mittel gegen X.*

8 Gesetze der großen Zahlen

In diesem Abschnitt ist $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ immer ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 8.1 (Momente)**.** Ist für eine Zufallsvariable X die Erwartung $\mathbb{E}\,|X|^n$ endlich, so nennt man $\mathbb{E}X^n$ das *n-te Moment von X*.

Definition 8.2 (Varianz)**.** Für $X \in \mathfrak{L}_2$ bezeichnet $\sigma^2 = \operatorname{var} X := \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$ die *Varianz* von X.

Satz 8.3 (Minimalitätseigenschaft des Erwartungswertes)**.** *$X \in \mathfrak{L}_2$:*

$$\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \min_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}(X - a)^2$$

Anmerkung: Für den Median m von X gilt $\mathbb{E}\,|X - m| = \min_a \mathbb{E}\,|X - a|$.

Satz 8.4 (Steiner'scher Verschiebungssatz)**.** *$X \in \mathfrak{L}_2$:*

$$\operatorname{var} X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2.$$

Definition 8.5 (Kovarianz und Korrelationskoeffizent)**.** Seien $X, Y \in \mathfrak{L}_2$, dann bezeichnet $\operatorname{cov}(X, Y) := \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)$ die *Kovarianz* von X und Y und $\rho = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var} X \operatorname{var} Y}}$ ihren *Korrelationskoeffizenten.*

Satz 8.6. *$X, Y \in \mathfrak{L}_2$:*

$$\operatorname{var}(X + Y) = \operatorname{var} X + \operatorname{var} Y + 2\operatorname{cov}(X, Y).$$

Sind X und Y unabhängig, so ist $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$, die Umkehrung gilt i. A. nicht.

Definition und Satz 8.7 (Stichprobenmittel)**.** *Sei (X_n) eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen aus $\mathfrak{L}_2$ mit identischem Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Dann bezeichnet $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ das* Stichprobenmittel*. Es gilt* $\operatorname{var}\overline{X}_n = \frac{\sigma^2}{n}$.

Anmerkung: "***iid***" = "independent and identically distributed".

Satz 8.8 (schwaches Gesetz der großen Zahlen)**.** *Sei (X_n) eine Folge von iid Zufallsvariablen aus $\mathfrak{L}_2$ mit Erwartungswert μ. Dann konvergiert das Stichprobenmittel $\overline{X}_n$ in Wahrscheinlichkeit gegen μ:*

$$\forall \epsilon > 0 : \lim_{n \to \infty} P\left(\left[\left|\overline{X}_n - \mu\right| > \epsilon\right]\right) = 0.$$

Satz 8.9 (starkes Gesetz der großen Zahlen)**.** *Sei (X_n) eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen aus $\mathfrak{L}_2$ mit identischem Erwartungswert μ deren Varianzen nach oben beschränkt sind. Dann konvergiert $\overline{X}_n$ fast sicher gegen μ:*

$$P\left(\left[\lim_{n \to \infty} \overline{X}_n = \mu\right]\right) = 1.$$

Satz 8.10 (Ungleichung von Kolmogorow)**.** *Seien $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{L}_2$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_k = 0$ $(\forall k)$, so gilt für alle $\epsilon > 0$*

$$P\left(\left[\max_{1 \le k \le n}\left|\sum_{i=1}^k X_i\right| > \epsilon\right]\right) \le \frac{\sum\limits_{i=1}^n \operatorname{var} X_i}{\epsilon^2}.$$

Satz 8.11 (Kolmogorows Gesetz der großen Zahlen)**.** *Sei* (X_n) *eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen aus* $\mathfrak{L}_2$ *mit* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \operatorname{var} X_i < \infty$ *und* $\mathbb{E}X_i = 0$*,* $\forall i$*. Dann konvergiert* $\overline{X}_n$ *fast sicher gegen* 0*.*

Satz 8.12. *Sei* (X_n) *eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen aus* $\mathfrak{L}_2$ *mit* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \operatorname{var} X_i < \infty$*. Dann konvergiert* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)$ *fast sicher gegen* 0*.*

Satz 8.13. *Sei* (X_n) *eine Folge von iid Zufallsvariablen aus* $\mathfrak{L}_1$ *mit Erwartungswert* μ*. Dann konvergiert* $\overline{X}_n$ *fast sicher gegen* μ*.*

Satz 8.14. *Sei* (X_n) *eine Folge von iid Zufallsvariablen für die* $\overline{X}_n$ *P-fast sicher gegen* μ *konvergiert. Dann sind die* X_n *aus* $\mathfrak{L}_1$ *und* $\mathbb{E}X_n = \mu$*.*

Definition 8.15 (empirische Verteilungsfunktion)**.** Seien $X_1, \dots, X_n$ iid Zufallsvariablen. Dann heißt

$$F_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(-\infty,x]}(X_i)$$

die *empirische Verteilungsfunktion* von $X_1, \dots, X_n$.

Satz 8.16 (Gliwenko-Cantelli; Fundamentalsatz der Statistik)**.** *Sei* (X_n) *eine Folge von iid Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion* F*. Dann konvergiert* $F_n(x)$ *fast sicher gegen* $F(x)$*. Mit*

$$d_n := \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|$$

gilt

$$P\left([\lim_{n\to\infty} d_n = 0]\right) = 1,$$

die Konvergenz ist also auch gleichmäßig.

Satz 8.17 (Kolmogorow-0-1 für Zufallsvariablen)**.** *Sei* (X_n) *eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen und*

$$\mathfrak{T}_\sigma := \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots).$$

Dann gilt für jedes $A \in \mathfrak{T}_\sigma$*:* $P(A) = 0$ *oder* $P(A) = 1$*.*

9 Verteilungskonvergenz – zentraler Grenzverteilungssatz

Der Begriff "Verteilungsfunktion" wird in diesem Abschnitt immer im engeren Sinn verwendet, außer es wird extra darauf hingewiesen, dass es sich um eine Verteilungsfunktion im weiteren Sinn handelt.

Definition 9.1 (Verteilungskonvergenz)**.** Eine Folge von Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F_n konvergiert *in Verteilung* (oder *schwach*) gegen eine Zufallsvariable die nach F verteilt ist, falls an allen Stetigkeitspunkten x von F gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$. Man schreibt: $F_n \Rightarrow F$.

Satz 9.2. *Konvergiert eine Folge von Zufallszahlen X_n in Wahrscheinlichkeit gegen X, so konvergiert sie auch in Verteilung ($F_{X_n} \Rightarrow F_X$).*

Satz 9.3 (Darstellungssatz von Skorokhod)**.** *Konvergiert eine Folge von Verteilungsfunktionen F_n schwach gegen F, dann gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ und unabhängige Zufallsvariablen X_n und X auf diesem Raum, so dass die F_n Verteilungsfunktionen von X_n sind, F jene von X und X_n P-fast sicher gegen X konvergiert.*

Satz 9.4 (Portmanteau)**.**

$$F_n \Rightarrow F \iff \lim_{n\to\infty} \int f \,\mathrm{d}F_n = \int f \,\mathrm{d}F \quad \forall f : \Omega \to \mathbb{R} \textit{ stetig und beschränkt.}$$

Satz 9.5 (zentraler Grenzverteilungssatz)**.** *Sei (X_n) eine Folge von iid Zufallsvariablen mit endlicher Varianz σ^2 und Erwartungswert μ. Dann konvergiert $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ in Verteilung gegen eine mit $N(0,1)$ verteilte Zufallsvariable.*

$\frac{X_i-\mu}{\sigma}$ nennt man normierte Zufallsvariablen (sie haben Erwartungswert 0 und Varianz 1).

Satz 9.6 (Helly)**.** *Sei (F_n) eine Folge von Verteilungsfunktionen. Dann existiert eine Teilfolge (F_{n_k}) und eine Verteilungsfunktion im weiteren Sinn, so dass $F_{n_k} \Rightarrow F$.*

Definition 9.7 (straff)**.** Man nennt eine Folge (F_n) von Verteilungsfunktionen *straff*, wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein $K_\epsilon \in (0, \infty)$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $F_n(-K_\epsilon) < \epsilon$ und $F_n(K_\epsilon) > 1 - \epsilon$.

Satz 9.8 (Prochorow)**.** *Sei (F_n) eine straffe Folge von Verteilungsfunktionen. Dann existiert eine Teilfolge (F_{n_k}) und eine Verteilungsfunktion F im engeren Sinn, so dass $F_{n_k} \Rightarrow F$.*

Definition 9.9 (charakteristische Funktion)**.** Sei μ ein endliches Maß auf auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Die Funktion

$$\varphi(t) := \int e^{itx} \,\mathrm{d}\mu(x)$$

heißt *charakteristische Funktion* von μ. Ist X eine Zufallsvariable, so nennt man die Funktion

$$\varphi(t) := \mathbb{E}e^{itX} = \int e^{itx} \,\mathrm{d}F_X(x)$$

die *charakteristische Funktion* von X.

Die charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen ist als Integral einer beschränkten Funktion immer wohldefiniert, und es gilt $|\varphi(t)| \leq \mu(\Omega)$.

Definition 9.10 (momenterzeugende Funktion)**.** Sei X eine Zufallsvariable. Dann heißt die Funktion $M_X(t) := \mathbb{E}e^{tX}$ die *momenterzeugende Funktion* von X, falls sie in einem offenen Intervall um 0 existiert.

Die momenterzeugende Funktion muss nicht immer existieren.

Satz 9.11. *Seien X und Y unabhängige Zufallszahlen, dann gilt*

$$\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y \text{ und } M_{X+Y} = M_X M_Y.$$

Satz 9.12.

- *φ_X ist gleichmäßig stetig;*
- *für $X \in \mathfrak{L}_n$ gilt $M'(t) = \mathbb{E}Xe^{tX}$, also: $M^{(n)}(0) = \mathbb{E}X^n$;*
- *für $X \in \mathfrak{L}_n$ gilt $\varphi^{(n)}(t) = i^n \mathbb{E}X^n e^{itX}$, also: $\varphi^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}X^n$;*
- *$\varphi_F = \varphi_G \Rightarrow F(x) = G(x)$ an allen Stetigkeitspunkten von F und G;*
- *konvergiert eine Folge von Verteilungsfunktionen (F_n) schwach gegen eine Verteilungsfunktion F im engeren Sinn, dann konvergiert φ_{F_n} nach φ_F.*

Satz 9.13 (Umkehrsatz)**.** *Sei φ die charakteristische Funktion zu einer Verteilungsfunktion F. Es gilt für zwei Stetigkeitspunkte $a < b$ von F:*

$$F(b) - F(a) = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Satz 9.14. *Sei φ die charakteristische Funktion zu einer Verteilungsfunktion F. Ist φ integrierbar, dann hat F eine Dichte f und*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Satz 9.15 (Stetigkeitssatz)**.** *Sei (φ_n) eine Folge charakteristische Funktionen zu Verteilungsfunktionen F_n, die gegen eine in 0 stetige Funktion φ konvergiert. Dann ist φ charakteristische Funktion einer Verteilung F mit $F_n \Rightarrow F$.*

A Aus den Übungen

Ich habe versucht die wichtigsten Sätze aus den Übungen herauszuschreiben. Falls ich etwas vergessen haben sollte: `me@caramdir.at`. Die Verteilungen sind um einige Eigenschaften, die wir nie explizit aufgeschrieben haben, ergänzt.

Satz A.1.

- $\mathbf{1}_{\limsup A_n} = \limsup \mathbf{1}_{A_n}$
- $\mathbf{1}_{\liminf A_n} = \liminf \mathbf{1}_{A_n}$

Satz A.2. *Sei $\mathfrak{R}$ ein Ring, dann ist*

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{R}) = \{A : A \in \mathfrak{R} \vee A^c \in \mathfrak{R}\}.$$

Satz A.3. *Jedes der folgenden Mengensysteme erzeugt die Borel-Mengen auf $\mathbb{R}$:*

- *Die halboffenen Intervalle;*
- *die offenen Intervalle;*
- *die offenen Mengen;*
- *die abgeschlossenen Intervalle;*
- *die abgeschlossenen Mengen;*
- *die Intervalle mit rationalen Endpunkten;*
- *die kompakten Mengen.*

Satz A.4. *Sei $\mathfrak{C} \neq \emptyset$ ein Mengensystem, dann gilt:*

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{C}) \Leftrightarrow \mathfrak{R}(\mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{M}(\mathfrak{C}).$$

Satz A.5. *Jeder σ-Ring ist endlich oder überabzählbar.*

Satz A.6 (Jordan'sche Gleichung)**.** *Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und C_k das Ereignis, dass genau k der Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ eintreffen. Dann gilt*

$$P(C_k) = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{k+j}{k} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{k+j} \leq n} P(\bigcap_{l=1}^{k+j} A_{i_l}).$$

Satz A.7 (Bonferroni-Ungleichung)**.** *Seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ und $m \in \{1, \ldots, n\}$, dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \leq P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i), \quad m \text{ gerade}$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \geq P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i), \quad m \text{ ungerade.}$$

Satz A.8. *Seien μ und ν Maße auf einem Semiring $\mathfrak{T}$. Dann ist $(\mu+\nu)^* = \mu^* + \nu^*$ und $\mathfrak{M}_{(\mu+\nu)^*} \supseteq \mathfrak{M}_{\mu^*} \cap \mathfrak{M}_{\nu^*}$. Wenn μ und ν σ-endlich sind gilt die Gleichheit.*

Satz A.9. *Ein äußeres Maß, das auf einem Ring additiv ist, ist dort auch ein Maß.*

Satz A.10. *Für die verallgemeinerte Inverse F^{-1} einer Wahrscheinlichkeitsverteilung gilt:*

- $\forall p \in [0,1] : F(F^{-1}(p)) \geq p$;
- $\forall x \in \mathbb{R} : F^{-1}(F(x)) \leq x$;
- F^{-1} *ist linksstetig;*
- F *ist stetig* $\Rightarrow F(F^{-1}(p)) = p$;
- F *ist strikt monoton* $\Rightarrow F^{-1}(F(x)) = x$.

Satz A.11. *Konvergiert eine Folge (X_n) nichtnegativer messbarer Funktionen mit $\sup_n \int X_n \,\mathrm{d}\mu < \infty$ μ-fast überall gegen X, so ist X integrierbar und es gilt $\int X \,\mathrm{d}\mu \leq \sup_n \int X_n \,\mathrm{d}\mu$.*

Satz A.12. *Sei (X_n) eine Folge integrierbarer Funktionen in $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \int |X_n| \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ μ-fast überall gegen eine integrierbare Funktion X und es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \int X_n \,\mathrm{d}\mu = \int X \,\mathrm{d}\mu$.*

Definition und Satz A.13 (Faltung)**.** *Seien P_1, P_2, P_3 Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Dann ist mit $P_1 * P_2(A) := \int P_1(A-y) \,\mathrm{d}P_2(y)$ $(A \in \mathfrak{B})$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ definiert. Sie wird die* Faltung *von P_1 und P_2 genannt. Es gilt:*

- $P_1 * P_2 = P_2 * P_1$.
- $P_1 * (P_2 * P_3) = (P_1 * P_2) * P_3$.
- *Sind X_1, X_2 unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $P_i := PX_i^{-1}$, so gilt: $P_1 * P_2 = P(X_1 + X_2)^{-1}$.*
- *$P_i \ll \lambda$ dann ist $P_1 * P_2 \ll \lambda$ und*
$$\frac{\mathrm{d}P_1 * P_2}{\mathrm{d}\lambda}(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}\lambda}(s-y) \frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}\lambda}(y) \,\mathrm{d}\lambda(y).$$

Satz A.14. *Sei $\mu = \mu_c + \mu_s$ ein L-S-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit Verteilungsfunktion F und der Lebesgue-Zerlegung $\mu_c \ll \lambda$, $\mu_s \perp \lambda$. Es gilt dann:*

- *μ_s ist λ-fast überall differenzierbar mir $\mathrm{D}\mu_s = 0$ λ-fast überall, und*
- *F ist λ-fast überal differenzierbar mit $F' = \frac{\mathrm{d}\mu_c}{\mathrm{d}\lambda} = \mathrm{D}\mu_c = \mathrm{D}\mu$ λ-fast überall.*

Satz A.15. *Seien $(\Omega_i, \mathfrak{S}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ zwei σ-endliche Maßräume und $\nu_i \ll \mu_i$. Dann gilt $\nu_1 \otimes \nu_2 \ll \mu_1 \otimes \mu_2$ und*

$$\frac{\mathrm{d}\nu_1 \otimes \nu_2}{\mathrm{d}\mu_1 \otimes \mu_2} = \frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu_1} \cdot \frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu_2}.$$

A.1 Verteilungen

Definition und Satz A.16 (diskrete Gleichverteilung)**.**

- *Merkmalsraum: endliche Menge* $A = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$
- $P[X = x] = \frac{1}{n}$

Definition und Satz A.17 (Bernoulli-Verteilung (Alternativvert.))**.**

- $X \sim B_p$, $p \in [0, 1]$
- *Merkmalsraum:* $\{0, 1\}$.
- 1 *(Erfolg) wird mit der Wahrscheinlichkeit* p *angenommen.*
- $P[X = 0] = 1 - p$, $P[X = 1] = p$
- $M_X(t) = pe^t + (1 - p)$
- $\mathbb{E}X = p$
- $\operatorname{var} X = p(p - 1)$

Definition und Satz A.18 (Binomialverteilung)**.**

- $X \sim B_{n,p}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $p \in [0, 1]$
- *Merkmalsraum:* $\{0, \dots, n\}$
- *Anzahl der Erfolge bei* n *unabhängig durchgeführten Bernoulliversuchen* B_p.
- $P[X = i] = \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}$
- $M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n$
- $\mathbb{E}X = np$
- $\operatorname{var} X = np(1 - p)$
- $B_p = B_{1,p}$

Definition und Satz A.19 (geometrische Verteilung)**.**

- $X \sim G_p$, $p \in [0, 1]$
- *Merkmalsraum* $\mathbb{Z}^+$
- *Anzahl der Versuche bis bei unabhängigen Bernoulliversuchen* B_p *der erste Erfolg eintritt.*
- $P[X = k] = p(1 - p)^{k-1}$
- $F_X(k) = 1 - (1 - p)^k$
- $\mathbb{E}X = \frac{1}{p}$
- $\operatorname{var} X = \frac{1-p}{p^2}$
- *gedächtnislos*

Definition und Satz A.20 (negative Binomialverteilung)**.**

- $X \sim negB_{n,p}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $p \in [0, 1]$
- *Merkmalsraum:* $\{n, n + 1, \dots\}$

- *Anzahl der notwendigen Bernoulliversuche B_p, bis n Erfolge eingetreten sind.*
- $P[X = k] = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$
- $\mathbb{E}X = \frac{n}{p}$
- $\operatorname{var} X = \frac{n(1-p)}{p^2}$
- $G_p = negB_{1,p}$

Definition und Satz A.21 (hypergeometrische Verteilung)**.**

- $X \sim H_{N,A,n}$, $N \in \mathbb{Z}^+$, $A \in \{0, \dots, N\}$, $n \in \{1, \dots, N\}$
- *Merkmalsraum:* $\{\max\{0, n - N + A\}, \dots, \min\{A, n\}\}$
- *Gezogene markierte Kugeln bei n Ziehungen ohne Zurücklegen aus einer Grundgesamtheit von N Kugeln mit A markierten Kugeln.*
- $P[X = k] = \frac{\binom{A}{k}\binom{N-A}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
- $\mathbb{E}X = n\frac{A}{N}$
- $\operatorname{var} X = n\frac{A}{N}\frac{(N-A)(N-n)}{N(N-1)}$

Definition und Satz A.22 (Poisson-Verteilung)**.**

- $X \sim P_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$
- *Merkmalsraum:* $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$
- *Anwendung z. B.: Gegeben sind ein zufälliges Ereignis, das durchschnittlich einmal in einem zeitlichen Abstand t_1 stattfindet und ein Zeitraum t_2. Die Poissonverteilung P_λ mit $\lambda = \frac{t_2}{t_1}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass im Zeitraum t_2 genau n Ereignisse stattfinden. Anders ausgedrückt ist λ die Wahrscheinlichkeit für das mittlere Auftreten eines Ereignisses in einem Intervall.*[5]
- $P[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
- $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$
- $\mathbb{E}X = \lambda$
- $\operatorname{var} X = \lambda$
- *Wenn das zeitliche Eintreffen seltener Ereignisse einen Poisson-Prozess bildet, folgen die Zeitintervalle zwischen den Ereignissen einer Exponentialverteilung.*[6]

Definition und Satz A.23 (stetige Gleichverteilung)**.**

- $X \sim U_{a,b}$ *oder* $S_{a,b}$, $-\infty < a < b < \infty$
- *Merkmalsraum:* $[a, b]$
- $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$
- $F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$ *(für $x \in [a, b]$)*

---

[5] Zitat: `http://de.wikipedia.org/wiki/Poisson-Verteilung`
[6] ebd.

- $\mathbb{E}X = \frac{a+b}{2}$
- $\operatorname{var} X = \frac{(b-a)^2}{12}$

Definition und Satz A.24 (Gamma-Verteilung)**.**

- *$X \sim \gamma(a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}^+$*
- *Merkmalsraum: $\mathbb{R}^+$*
- $f_X(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}$
- $M_X(t) = (1 - \frac{t}{b})^{-a}$
- $\mathbb{E}X = \frac{a}{b}$
- $\operatorname{var} X = \frac{a}{b^2}$
- *Spezialfälle: $Ex_\lambda = \gamma(1, \lambda)$, $Er_{n,\lambda} = \gamma(n, \lambda)$, $\chi^2_k = \gamma(\frac{k}{2}, \frac{1}{2})$*
- *Nach den durchgerechneten Übungsbeispielen zu schließen, verwendet Prof. Kusolitsch $\Gamma(\alpha, \beta) = \gamma(\alpha, \frac{1}{\beta})$.*

Definition und Satz A.25 (Exponentialverteilung)**.**

- *$X \sim Ex_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$*
- *Merkmalsraum: $\mathbb{R}^+$*
- *Anwendung z. B.: Zwischenankunftszeiten eines Poisson-Prozesses mit Stärke λ; Lebensdauern*
- $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
- $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
- $M_X(t) = (1 - \frac{t}{\lambda})^{-1}$
- $\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}$
- $\operatorname{var} X = \frac{1}{\lambda^2}$
- *gedächtnislos*
- $Ex_\lambda = \gamma(1, \lambda)$

Definition und Satz A.26 (Erlangverteilung)**.**

- *$X \sim Er_{n,\lambda}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$*
- *Merkmalsraum: $\mathbb{R}^+$*
- *Verteilung der Summe von n Ex_λ verteilter Zufallsvariablen*
- $f_X(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}$
- $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{i=1}^{n} \frac{(\lambda x)^{i-1}}{(i-1)!}$
- $M_X(t) = (1 - \frac{t}{\lambda})^{-n}$
- $\mathbb{E}X = \frac{n}{\lambda}$
- $\operatorname{var} X = \frac{n}{\lambda^2}$
- $Er_\lambda = \gamma(n, \lambda)$

Definition und Satz A.27 (Normalverteilung)**.**

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$
- *Merkmalsraum:* $\mathbb{R}$
- $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$
- $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
- $\mathbb{E}X = \mu$
- $\operatorname{var} X = \sigma^2$
- $N(0,1)$ *heißt* Standardnormalverteilung
- $X^2 \sim \chi_1^2$

Definition und Satz A.28 (Chi-Quadrat-Verteilung)**.**

- $X \sim \chi_k^2$, $k \in \mathbb{Z}^+$
- *Merkmalsraum:* $\mathbb{R}^+$
- *Verteilung der Summe der Quadraten von k unabhängig Standardnormalverteilten Zufallvariablen.*
- $f_X(x) = \frac{x^{\frac{k}{2}-1}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})} e^{-\frac{x}{2}}$
- $M_X(t) = (1-2t)^{-\frac{k}{2}}$ *(für* $2t < 1$*)*
- $\mathbb{E}X = k$
- $\operatorname{var} X = 2k$
- $\chi_k^2 = \gamma(\frac{k}{2}, \frac{1}{2})$

Definition und Satz A.29 (Cauchy-Verteilung)**.**

- $X \sim \mathrm{Cauchy}(x_0, \gamma)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$
- *Markmalsraum:* $\mathbb{R}$
- $f_X(x) = \frac{1}{\pi\gamma\left(1+\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right)}$
- $F_X(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}$
- $M_X(t)$ *existiert nicht.*
- $\varphi_X(t) = e^{x_0 it - \gamma|t|}$
- $\mathbb{E}X$ *existiert nicht*
- $\operatorname{var} X$ *existiert nicht*
- x_0 *ist Median und Modus*
- $\mathrm{Gamma}(0,1)$ *wird als Standard-Cauchy-Verteilung bezeichnet.*

Satz A.30 (Faltungen)**.**

- $B_{n_1,p} * B_{n_2,p} = B_{n_1+n_2,p}$
- $negB_{n_1,p} * negB_{n_2,p} = negB_{n_1+n_2,p}$
- $P_{\lambda_1} * P_{\lambda_2} = P_{\lambda_1+\lambda_2}$
- $Er_{n_1,\lambda} * Er_{n_2,\lambda} = Er_{n_1+n_2,\lambda}$
- $\gamma(a_1, b) * \gamma(a_2, b) = \gamma(a_1 + a_2, b)$
- $N(\mu_1, \sigma_1^2) * N(\mu_2, \sigma_2^2) = N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

B Konvergenzarten

Folgende Tabelle stellt dar, welche Konvergenzart messbarer Funktionen aus welcher folgt. Die Folgerungen mit strichlierten Pfeilen ($\dashrightarrow$) gelten nur in endlichen Maßräumen. Außerdem sei $1 \leq p \leq q < \infty$.

$$\begin{tikzcd}
\substack{\text{glm. Konv. } \mu\text{-fü} \\ (\text{Konv. in } L_\infty)} \arrow[r, Rightarrow, dashed, "7.16"] \arrow[d, Rightarrow] & \text{Konv. in } L_p \arrow[d, Rightarrow, "7.14"] & \text{Konv. in } L_q \arrow[l, Rightarrow, dashed, "7.15"'] \\
\mu\text{-fast glm. Konv.} \arrow[r, Rightarrow, "4.29"] \arrow[d, Rightarrow, shift right] & \text{Konv. im Maß} \arrow[r, Leftrightarrow, "4.29", "4.30"'] \arrow[d, Rightarrow, "9.2"] & \text{CF im Maß} \arrow[d, Rightarrow, "4.30"] \\
\text{Konv. } \mu\text{-fü} \arrow[u, Rightarrow, dashed, shift right, "4.28"'] \arrow[ur, Rightarrow, dashed, "4.28"'] & \text{Konv. in Verteilung} & \substack{\exists\ \mu\text{-fast} \\ \text{glm. konv. TF}}
\end{tikzcd}$$

C Changelog

1.0 (12. Oktober 2006) Alle Definitionen und Sätze der Vorlesung außer den letzten beiden Stunden (bedingte Wahrscheinlichkeit) und einige Ergänzungen von mir.

1.1 (6. Februar 2007) Lizenzänderung (zu CC); Geänderte Voraussetzungen für die Sätze 5.18 und 5.19 (Y muss integrierbar sein); Satznummern 5.31 - 5.33 haben sich um Eins nach hinten verschoben; Satznummern 7.4 - 7.13 haben sich um Zwei nach hinten verschoben; neuer Satz 7.16; neue Übersicht über die Konvergenzarten; viele kleine Fehler korrigiert und Verbesserungen hinzugefügt.

1.1.1 (28. Februar 2007) Viele kleine stilistische Verbesserungen.

1.1.2 (15. August 2007) Definitionen Borel-/Lebesque-messbar (4.1) an das Skriptum angepasst. Tippfehler in Def. 4.2.

1.2 (10. Oktober 2007) Viele mehr oder weniger kleine Fehler, größtenteils gefunden von Dominik. Achtung: Einige Seitenzahlen haben sich verschoben.

Index